UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

BRUNO SILVEIRA CORRÊA

CONTRIBUIÇÕES DO SOFTWARE WINPLOT NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS UTILIZANDO SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO.

PORTO ALEGRE
2014

Bruno Silveira Corrêa

CONTRIBUIÇÕES DO SOFTWARE WINPLOT NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS UTILIZANDO SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO.

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Leandra Anversa Fioreze

Porto Alegre

2014

Bruno Silveira Corrêa

CONTRIBUIÇÕES DO SOFTWARE WINPLOT NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS UTILIZANDO SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO.

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Leandra Anversa Fioreze

BANCA EXAMINADORA:

Prof.ª Dr.ª Leandra Anversa Fioreze
Universidade Federal de Santa Maria / Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof.ª Dr.ª Andréia Dalcin
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

A Deus, energia que rege o universo, que se encontra de baixo da menor das pedras, mas, ao mesmo tempo, no alto das maiores montanhas e, principalmente, no coração de todos nós. Por Tu estares sempre do meu lado, mesmo nos momentos em que o meu pensamento não está perto de Ti, pela motivação e força que nunca me deixou faltar, e principalmente, por nunca me abandonar mesmo que a dúvida frequente esteja em mim, com todo o meu coração, minha eterna gratidão.

À minha família, que me deu todo o suporte para que eu alcançasse meus sonhos. Obrigado, mãe, pela dedicação, sacrifício e o amor incalculável que me destes até hoje. Obrigado, pai, pelo carinho e incentivo para trilhar o meu caminho, além de todos os ensinamentos que me fizeram ser quem sou hoje. Obrigado, madrinha Cenira, que mesmo longe, nunca deixou de orar por mim. É para orgulhar vocês que estou aqui hoje e acredito que essa seja a melhor forma e única de agradecer o amor de vocês.

A todos os meus colegas e amigos que entraram comigo na universidade e aos amigos que fui fazendo ao longo desses anos, cada um de vocês foi especial ao longo dessa caminhada, aos colegas e amigos de PIBID, vocês fizeram esses anos serem muito especiais. Muito obrigado.

Aos meus amigos que me acompanharam desde o ensino fundamental e médio e que ficaram em minha vida, que compreenderam a minha ausência em muitos momentos, torcendo sempre para que eu conquistasse o meu objetivo. Um agradecimento especial para Johnny Mello, Leonardo Martins, Mauricio Morais e Ariane Gomes, pela amizade eterna.

À minha ex-professora de Matemática Nilsa Bom, que me inspirou e incentivou a lecionar. As tuas atitudes me mostraram o quanto a beleza da Matemática e a satisfação de ser professor. Muito Obrigado

Ao meu amor Daniele Vargas, por me fazer mais feliz a cada dia do teu lado. A melhor companhia desse mundo, que me faz crescer e evoluir como pessoa a cada momento. Tive muitas motivações para chegar até aqui, e hoje, tu é a minha principal motivação para eu ir mais longe. Vou fazer de tudo para que tu fiques na minha vida para sempre, porque eu te amo. Muito obrigado.

À minha orientadora Leandra Anversa Fioreze, pela orientação, paciência, amizade e apoio; e à Prof.ª Dr.ª Andréia Dalcin e ao Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso por aceitarem o convite para avaliarem esse trabalho.

“Somente aquilo que a morte não pode levar embora é real. Tudo o mais é irreal; é feito da mesma substância de que são feitos os sonhos.”

Osho

RESUMO

Este trabalho apresenta a criação e aplicação de uma proposta didática abordando o ensino e aprendizagem dos conteúdos de funções afins e quadráticas com o auxílio do software winplot. Temos como objetivo a articulação da representação algébrica das funções com as suas formas gráficas, facilitando essa relação presente entre essas duas representações. A pesquisa foi realizada com alunos do segundo ano do Ensino Médio da Escola Técnica Irmão Pedro na cidade de Porto Alegre. Utilizamos como método de pesquisa a Engenharia Didática que tem como um de seus objetivos vincular a pesquisa com a prática docente, além de proporcionar uma estrutura organizada do trabalho. A sequência de atividades foi elaborada de acordo com a Teoria dos Níveis de Sofisticação do Desenvolvimento Cognitivo de David Tall. No que se refere às conclusões do trabalho, podemos salientar o uso do software Winplot como uma ferramenta importante para auxiliar na aprendizagem do conteúdo de funções afins e quadráticas, enfatizando a relação entre as suas representações algébricas e geométricas.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem, Funções Afins e Quadráticas, Software Winplot, Engenharia Didática, Teoria das Etapas de Sofisticação do Conhecimento.

ABSTRACT

This work presents the creation and application of a didactic proposal addressing the teaching and learning of content linear and square functions with the aid of software Winplot. We have like objective the articulation of the algebraic representation of the functions with his graphic forms, facilitating that present relation between those two representations utilizing the software Winplot. The research was carried out with students of the second year of the secondary education of Technical School Irmão Pedro in Porto Alegre. We have utilized like approach of research the Educational Engineering that has as one of his objectives Link the research with the educational practice, in addition to providing a structure organised of the work. The sequence of activities was elaborated in accordance with the Theory of the Levels of Sophistication of the Cognitive Development of David Tall. With regard to the conclusions of the work, we can highlight the use of the software Winplot as an important tool to aid in learning the contents of related and quadratic functions, emphasizing the relationship between their algebraic and geometric representations.

Keywords: teaching and learning, Related Functions and quadratic, Winplot Software, Didactics Engineering, Theory of the stages of sophistication of knowledge.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A inspiração desse trabalho surgiu a partir do meu sétimo semestre de faculdade, na disciplina de Educação Matemática e Tecnologia. Nesta disciplina, utilizei o software *Winplot*, no qual pude explorar um recurso do software chamado “superfície de revolução”. Esse recurso possibilita a construção de superfícies a partir de funções revolucionadas em torno dos eixos, ou de retas. Visto as possibilidades existentes a partir do software e a oportunidade de elaborar este trabalho, tive motivação para a construção de uma Proposta de Ensino, buscando enriquecer as aulas de Matemática, mais precisamente, os conteúdos de funções afins e funções quadráticas. Sendo assim, fizemos uma pesquisa na área de Educação Matemática sobre o ensino de funções afins e quadráticas utilizando o software matemático Winplot, verificando quais as vantagens do uso de tecnologia dentro de sala de aula.

Acreditamos que o professor, além de ensinar, deve também assumir um papel de pesquisador, com o objetivo de aperfeiçoar seus métodos de ensino. Como Carneiro (2008) coloca, a importância do professor buscar o conhecimento, analisando a realidade que está a sua volta, para modificá-la, tendo como objetivo o acréscimo das suas práticas pedagógicas.

Inicialmente, em busca de uma contribuição qualitativa para o ensino de funções afins e quadráticas, realizamos elaboração de uma Proposta de Ensino, na qual abordamos esses conteúdos utilizando o software Winplot. Esta proposta tem como principal objetivo fazer com que os alunos relacionem a representação algébrica de uma função afim ou quadrática com a sua representação gráfica, e vice-versa. O guia dos livros didáticos enaltece a importância de representar as funções de diferentes formas, seja por tabelas, representações algébricas ou gráficos, é necessário estabelecer uma relação entre essas formas (BRASIL, 2012); para auxiliar na compreensão dessas relações entre as representações, a utilização do comutador pode ser um facilitador.

O conteúdo de funções pode aparecer em diversas situações-problemas, mostrando a relevância da leitura e da interpretação de gráficos de funções, ou seja, para o aluno entender essas situações, ele precisa saber interpretar um gráfico, entender o comportamento de determinadas funções e identificar os elementos que são necessários para sua construção. Por isso, para que o aluno possa ter mais facilidade na interpretação de um gráfico, apostamos no uso do software Winplot como um possível contribuidor no ensino de funções afins e quadráticas.

Queremos também, além de contribuir para a melhoria do ensino do conteúdo de funções afins e quadráticas, valorizar o uso do computador e seus recursos tecnológicos, buscando abordar os conteúdos envolvidos de uma forma diferente da habitual, trazendo uma proposta para ser realizada em um ambiente informatizado, no qual o aluno pode ser mais autônomo no desenvolvimento do seu conhecimento (VALENTE, 1993a). O objetivo é tentar responder como é possível que os alunos compreendam melhor as relações entre as representações algébricas e gráficas com a ajuda do uso da tecnologia.

Para a construção deste trabalho, realizamos a pesquisa utilizando os princípios da Engenharia Didática. Esta metodologia se baseia na experimentação no ambiente escolar. A escolha dessa metodologia deve-se ao fato de acreditarmos na importância da realização da prática didática dentro de sala de aula como uma prática investigativa. Também consideramos que a Engenharia Didática pode proporcionar uma boa organização para a estruturação do nosso trabalho.

A proposta de ensino foi aplicada com alunos do segundo ano do Ensino Médio da Escola Técnica Irmão Pedro, situada no bairro Floresta em Porto Alegre. Para a orientação na elaboração das atividades da nossa sequência didática utilizamos a Teoria dos Níveis de Sofisticação do Desenvolvimento Cognitivo de David Tall.

Este trabalho foi organizado em dez capítulos, de modo que no capítulo dois, apresentamos algumas ideias da Teoria dos Níveis de Sofisticação do Desenvolvimento Cognitivo, na qual é dada a ênfase na aprendizagem de conceitos matemáticos a partir das etapas de procedimento, processos e *proceitos*.

No capítulo três, apresentamos as etapas da Engenharia Didática, explicando cada uma dessas etapas da metodologia.

No capítulo quatro, justificamos os motivos que nos levaram a escolha do tema para posteriormente, a partir do capítulo cinco, iniciarmos as etapas da Engenharia Didática. Realizamos, primeiramente, o estudo das análises prévias, etapa na qual verificamos como o estudo do conteúdo escolhido vem sendo abordado no ensino.

No sexto capítulo temos a etapa da análise a *priori*, na qual colocamos as escolhas que fizemos para a elaboração de uma proposta de Ensino para o estudo de funções a fins e quadráticas com o auxílio do software Winplot. Também, neste capítulo, levantamos as hipóteses que consideramos possíveis durante a implementação da proposta.

A etapa de experimentação, na qual relatamos como foi realizada a aplicação da sequência didática e detalhamos as situações que nos chamaram a atenção, se encontra no capítulo sete. Neste capítulo, relacionamos o rendimento do aluno durante as atividades com a Teoria dos Níveis de Sofisticação do Desenvolvimento Cognitivo.

No oitavo capítulo encontra-se a análise a *posteriori*, na qual avaliamos a atividade por completo, o rendimento dos alunos e constatamos se as hipóteses que formulamos foram válidas durante a aplicação da nossa proposta de ensino.

No capítulo nove, descrevemos a validação da Engenharia, onde comparamos a análise a *priori*, com a análise a *posteriori*.

No último capítulo, o capítulo dez, apresentamos as considerações finais desta trabalho.

2. APORTES TEÓRICOS UTILIZADOS NESTA PESQUISA

Neste capítulo apresentaremos o referencial teórico que utilizamos como base para a construção da sequência didática, objetivando o ensino de gráficos de funções afins e quadráticas.

2.1. TEORIA DO DESENVOLVIMENTO COGNITIVO DE TALL

A teoria que utilizamos para concluir a ocorrência de aprendizagem dos conceitos matemáticos desenvolvidos neste trabalho foi a de David Tall, que relacionam tecnologia e crescimento cognitivo em Matemática.

Tall (1999, p. 3, apud COSER, 2008) acredita que "o crescimento cognitivo do pensamento matemático avançado se constrói não apenas sobre as capacidades cognitivas humanas, mas também sobre a interface e facilidades fornecidas pelo software". Temos o software como um facilitador, que, através de sua interface e ferramentas, pode auxiliar em possíveis relações de conceitos matemáticos. Tall ainda cita as três principais representações oferecidas pelo computador: numérica, simbólica e gráfica. Essas representações podem ser utilizadas como representações para auxiliar nas "percepções individuais de ideias matemáticas".

De acordo com Tall (1999, apud COSER, 2008) a inserção de recursos computacionais possibilita que o aluno agregue uma ampliação cognitiva, fazendo uma transição de um modo de pensar mais técnico para um modo mais formal. Porém, é necessária uma grande reformulação cognitiva, o que pode ocasionar muitas dificuldades para os alunos em fazer essa transição. Para facilitar essa transição, ele define três níveis de sofisticação do desenvolvimento cognitivo. Valendo-se destas ideias, utilizaremos os três níveis de Tall para o estudo de funções afins e quadráticas.

Na sequência (figura 1), temos um diagrama das três níveis da sofisticação, *procedimentos, processos e proceitos,* que estabelecem, segundo Tall, progresso cognitivo:

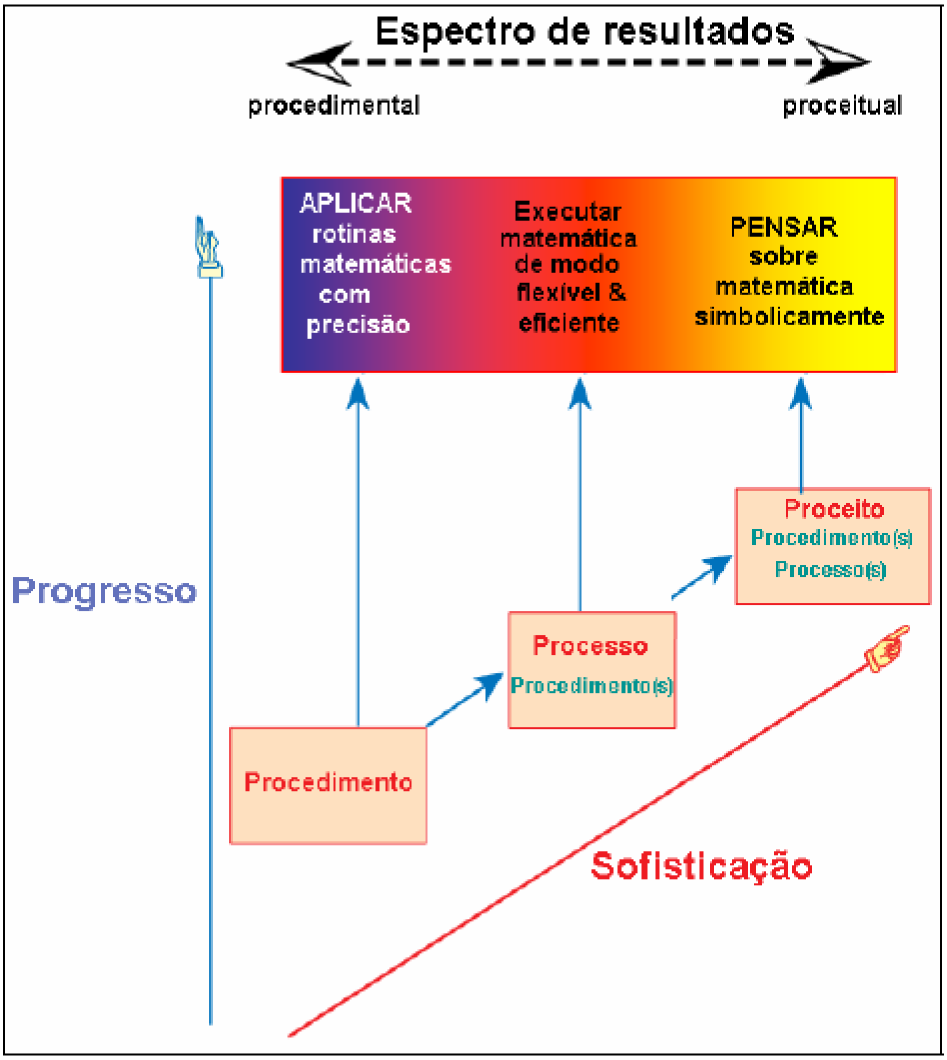


Figura 1 - Os três diferentes níveis de sofisticação – Fonte: Cóser, 2008.

Grey e Tall (1994) explicam que um procedimento pode ser aquele que é utilizado para encontrar uma resposta, sem a necessidade do envolvimento do conceito matemático, por exemplo, um algoritmo. Nesta etapa, utilizaremos de um "procedimento do software" (TALL, 2000, p. 213), no qual os alunos usarão o software como um recurso para construir os gráficos, ou melhor, para encontrar uma resposta na qual os conceitos matemáticos estarão implícitos, para, posteriormente, visualizar as mudanças de um gráfico para o outro com relação às suas leis algébricas.

O termo *processo* é usado por Tall (1999, p.5) "quando o procedimento é concebido como um todo; e o foco é nos dados e nos produtos preferivelmente do que no procedimento particular usado para conduzir o processo". Relacionando com a nossa proposta de ensino, passaremos para a etapa de processo quando deixarmos de lado o procedimento em si, e começarmos a nos direcionar para os conceitos matemáticos existentes nas construções de gráficos de funções afim e quadráticas. Porém, utilizaremos os procedimentos já compreendidos para se fazer valer o processo.

Finalmente temos a etapa de *proceito*, na qual os símbolos devem ser caracterizados como processos que possam ser efetuados e a conceitos que haja a possibilidade de se pensar a respeito (TALL, 2000). Nesta etapa o aluno constrói um pensamento mais formal e menos técnico, ou seja, em nossa proposta, o aluno conseguirá extrair os significados dos símbolos que correspondem aos movimentos dos gráficos, neste caso, os símbolos serão os coeficientes que exercem funções sobre os gráficos. Tall (1998, p. 12, apud COSER, 2008) ainda ressalta que "*proceitos* permitem que o indivíduo não somente conduza procedimentos, mas que considere símbolos como objetos mentais, e então não somente se *faça* matemática, mas também se *pense* sobre conceitos".

Em nosso trabalho com funções afins e quadráticas, a diferença entre processo e proceito é o fato de que na etapa de proceito, o aluno terá que representar os gráficos que se adaptem da melhor forma para o desenvolvimento da atividade, enquanto, na etapa de processo, o aluno lidará com cada situação separadamente, com seus exemplos partindo das construções já feitas no software.

2.2. SOBRE A TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO

Além da teoria de David Tall, que está diretamente vinculada ao uso da tecnologia em sala de aula, visando o uso do computador de forma a proporcionar o crescimento cognitivo do conhecimento matemático, buscamos nas pesquisas de José Armando Valente, justificar a importância de um ambiente informatizado na construção do conhecimento do aluno. Visando a tecnologia avançando dia após dia, Valente (1993a) ressalta essa importância da seguinte forma:

> Hoje, nós vivemos num mundo dominado pela informação e por processos que ocorrem de maneira muito rápida e imperceptível. Os fatos e alguns processos que ocorrem específicos que a escola ensina rapidamente se tornam obsoletos e inúteis. Portanto, ao invés de memorizar informação, os estudantes devem ser ensinados a buscar e a usar a informação. Estas mudanças podem ser introduzidas com a presença do computador que deve propiciar as condições para os estudantes exercitarem a capacidade de procurar e selecionar informação, resolver problemas e aprender independentemente (p. 6).

O computador pode ser considerado como uma ferramenta para que o aluno tenha autonomia para aprender e pesquisar, e não ser limitado a apenas um receptor de informações.

A partir dessa ideia, teremos também como objetivo na nossa sequência didática a autonomia do aluno, ou seja, queremos que o aluno chegue as suas conclusões, de forma que não sejamos os portadores do saber, fazendo questionamentos e os deixando livres para chegarem às soluções, construindo o seu conhecimento.

> [...] o computador deve ser utilizado como um catalisador de uma mudança do paradigma educacional. Um novo paradigma que promove a aprendizagem ao invés do ensino, que coloca o controle do processo de aprendizagem nas mãos do aprendiz, e que auxilia o professor a entender que a educação não é somente a transferência de conhecimento, mas um processo de construção do conhecimento pelo aluno, como produto do seu próprio engajamento intelectual ou do aluno como um todo. (VALENTE, 1993b, p. 40)

É interessante observar que a forma que Valente coloca o computador como um meio de auxiliar o professor a entender a construção do conhecimento como parte de um processo que deve ser desenvolvido pelo aluno, também é vista na teoria de Seymour Papert em relação ao uso da tecnologia na educação. Papert (1994) ressalta a ideia de que o professor deve assumir a figura de mediador do processo de aprendizagem, incentivando a construção do conhecimento a partir de reflexões e questionamentos, sendo que o trabalho com base na informática facilita o desempenho dessa figura de professor mediador, pois possibilita uma maior interação entre professor-aluno e, principalmente, aluno-aluno, em atividades que haja compartilhamento de saberes e trabalho colaborativo.

A partir da teoria de Tall e convencidos das vastas possibilidades do uso da tecnologia em sala de aula e importância do computador no auxílio do desenvolvimento do conhecimento do aluno na área de educação Matemática, organizamos a nossa sequência de ensino na qual elaboramos atividades de construção de gráficos de funções afins e quadráticas para serem realizadas com o auxílio do software Winplot. Temos como finalidade a articulação das teorias citadas com a prática dos alunos para a compreensão dos conceitos matemáticos necessários para a realização das atividades.

2.3. A METODOLOGIA ENGENHARIA DIDÁTICA.

O termo “Engenharia Didática” foi criado na década de 80, na França, com a finalidade de auxiliar na análise de situações didáticas na área de Didática das Matemáticas, que tem inspiração no trabalho do engenheiro, pois a sua produção necessita um sólido conhecimento científico para pesquisar soluções possíveis que não possuem ainda um modelo pronto de como resolvê-lo (ARTIGUE, 1996).

Segundo Carneiro (2005), a Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. Estas questões designam produções para o ensino, que surgem dos resultados das pesquisas, e também para uma certa metodologia de pesquisa que estão baseadas em experiências dentro de sala de aula.

A teoria da Engenharia Didática articula prática de ensino com prática de investigação. Esta metodologia pode ser considerada como uma referência para o desenvolvimento de produtos para o ensino, criados da ligação do conhecimento prático com o conhecimento teórico (CARNEIRO 2005).

Dizemos então que a Engenharia Didática contempla a dimensão teórica em comunhão com a dimensão experimental da pesquisa didática, ou seja, a teoria com a prática educativa.

2.3.1 As fases da engenharia didática.

Artigue (1996) organiza a metodologia e execução da Engenharia Didática em quatro fases:

1) Análises prévias;
2) Concepção a análise a *priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula;
3) Experimentação, ou seja, aplicação da proposta de ensino;
4) Análise a *posteriori* e validação da experiência.

A seguir explicaremos cada uma das etapas citadas da Engenharia Didática.

2.3.1.1 Análises prévias

Na etapa de Análises prévias, é analisado como o conteúdo escolhido é abordado habitualmente pelos professores em sala de aula, podendo então propor uma intervenção que organize o conteúdo tornando-o mais satisfatório e minimize as dificuldades encontradas pelos alunos.

Estas análises subdividem-se em três outras dimensões: epistemológica, didática e cognitiva.

1. Epistemológica: Nesta etapa é feito um breve estudo da construção do conteúdo a ser pesquisado ao longo dos anos.
2. Didática: Analisa-se a forma de abordagem do conteúdo considerando bibliografias já publicadas e métodos de ensino.
3. Cognitiva: Estudam-se as dificuldades encontradas pelos alunos na construção do conhecimento.

É nessa etapa das análises que serão observados os pontos que deverão ser mantidos e os que deverão ser mudados para tornar o estudo dos conteúdos abordados mais adequados epistemologicamente e/ou cognitivamente conforme os nossos objetivos. Também é nesta etapa que listamos os nossos constrangimentos que impedem e/ou dificultem estas mudanças.

2.3.1.2 Concepção e análise a *priori*

Terminada a etapa das análises prévias, é iniciada a concepção e análise a *priori*. Segundo Artigue (1996) é necessário descrever as escolhas realizadas, definindo variáveis de comandos, que podem ser divididas em: âmbito global, no qual descrevemos os nossos objetivos e a proposta didática, explicando as escolhas efetuadas, e âmbito local, que será a nossa proposta detalhada citando os recursos a serem utilizados e o planejamento para a aplicação da sequência didática.

É também nesta etapa que serão formuladas hipóteses pensando na possível aprendizagem dos alunos perante a aplicação da nossa proposta, para posteriormente comparar tais hipóteses com os resultados obtidos. É com essa comparação que será validada a Engenharia Didática.

2.3.1.3 Experimentação

Na fase seguinte temos a experimentação onde a proposta de ensino é aplicada com os alunos. Nesta etapa serão feitas as observações com o propósito de coletar informações dos acontecimentos durante a prática e produções dos alunos para que sejam analisadas.

2.3.1.4 Análise a *posteriori* e validação

Na etapa posterior a prática, temos a análise *posteriori* e a validação da experiência. De acordo com Artigue (1996), é feito o confronto entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori* com o objetivo de relatar o que foi proveitoso para a aprendizagem e a organização e planejamento da sequencia didática, assim como o que deveria ser melhorado a partir da análise da experimentação. Por fim, tem-se a conclusão da validade ou não da Engenharia Didática, que busca validar o método.

3. TEMA E CAMPO DE AÇÃO

Neste capítulo, descreveremos o tema de pesquisa assim como os motivos pelos quais escolhemos este tema. Acreditamos na importância da investigação reflexiva que se apropria da análise do ensino de um determinado conteúdo para o aperfeiçoamento dos recursos didáticos habituais. “Ao pensar a formação de professores, na junção da ação com a investigação, estamos na teoria dos professores reflexivos, aqueles que investigam e refletem sobre sua própria prática” (CARNEIRO, 205, pg. 114).

A partir de algumas experiências adquiridas no ambiente escolar, seja como aluno ou professor nas disciplinas de estágio fornecidas pela universidade ou bolsista do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência) do qual participei durante três anos, percebi que poderíamos abordar determinados conteúdos de modo diferente do habitual, impulsionando alguns questionamentos que nos fizeram pensar na escolha do tema desse trabalho de pesquisa. Concordamos que os alunos de Ensino Médio, ao criarem gráficos a partir da relação de tabelas, têm dificuldades em interpretar o comportamento do gráfico de uma função. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) observam que os gráficos devem ser construídos a partir de uma compreensão geral das relações de crescimento/decrescimento entre as variáveis e também que a construção de gráficos por meio de tabelas, não permite que se possa avançar no entendimento do comportamento das funções.

Pode-se observar durante as experiências em sala de aula que o método mais comum para esboçar um gráfico de uma função é a partir de tabelas utilizando alguns valores do domínio que são substituídos na função para obter-se pares ordenados, estes importantes para a construção do gráfico. Este método limita o raciocínio do aluno pois consideramos uma forma memorizada que não favorece a visualização do comportamento da função em todo o seu domínio, além de nos parecer um mecanismo falho na compreensão da relação entre a representação algébrica da função e a sua representação gráfica.

Em relação aos gráficos de funções quadráticas, acreditamos que o método de construção de gráficos da função quadrática pode se dar a partir da sua forma canônica (ver apêndice C). A forma canônica nos permite ter uma relação visível entre a representação algébrica e a representação gráfica das funções quadráticas, fugindo do método de encontrar pontos no gráfico (construção da tabela).

No decorrer das experiências em obtidas em sala de aula com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, foi possível observar que se tornou comum os alunos não saberem relacionar o comportamento do gráfico de uma função com a sua expressão algébrica e também o seu processo inverso, ou seja, descrever a sua expressão algébrica apenas tendo o gráfico da função, restando ao aluno, em sua maioria, testar pontos do domínio para poder esboçar o gráfico.

Acreditamos que a dificuldade que os alunos têm de associarem as representações algébricas e gráficas deve-se à ênfase dada à álgebra, como, por exemplo, as resoluções de equações que aparecem com frequência, em que o aluno deve descobrir o valor da incógnita por meio de cálculos algébricos. Quando necessário à construção dos gráficos, o aluno corresponde de forma que, marcando alguns pontos, ele pode esboçar o seu gráfico, não relacionando com a lei da função. A importância desta relação entre gráfico e expressão algébrica de uma função é destacada nas orientações curriculares para o Ensino Médio:

> [...] é importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes (BRASIL, 2006, p.72).

Com o objetivo de mostrar para os alunos esta relação entre representação gráfica e representação algébrica, utilizamos da tecnologia como auxílio para uma melhor visualização do comportamento das funções. Acreditamos que o computador pode, além de despertar o interesse do aluno, servir como ferramenta para auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos, por isso, queremos incentivar o uso de ambientes informatizados nas escolas. A tecnologia está cada vez mais presente na vida do aluno, por isso precisamos buscar os recursos que estão ao nosso alcance para possibilitar o enriquecimento das aulas de Matemática, adaptando as nossas abordagens metodológicas para esta nova realidade junto à escola, que necessita também acompanhar essa transformação. "Nossas rotinas de sala de aula também deveriam incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas também influenciam nas nossas formas de pensar, de aprender, de produzir" (GRAVINA, BASSO, p.12, 2012).

Pelos motivos descritos nesse capítulo e pelo fato de função sempre ter sido um conteúdo que nos interessou tanto pela Matemática em si, quanto às possíveis aplicações no cotidiano, queremos desenvolver uma proposta de ensino voltada para as construções de gráficos de funções afins e quadráticas a partir de suas representações algébricas utilizando recurso tecnológico para este determinado fim. Para isso, escolhemos como campo de ação, uma turma segundo ano do Ensino Médio, na qual os alunos já tenham estudado esse conteúdo, com o objetivo de uma melhora qualitativa na compreensão dos conceitos envolvidos no estudo de função afim e função quadrática.

Por fim, apontamos a seguinte questão: **Como o uso do software Winplot pode auxiliar os alunos a relacionarem as representações gráficas com as representações algébricas das funções afins e quadráticas?**

4. ANÁLISES PRÉVIAS

Esta etapa da Engenharia Didática está dividida em três partes:

a) Análise epistemológica- apontamos os avanços históricos das funções afins e quadráticas.

b) Análise didática- analisamos o ensino de funções a partir de diretrizes curriculares e livros didáticos.

c) Análise cognitiva- observamos os principais desafios para a compreensão do conteúdo das funções envolvidas.

4.1. CONSIDERAÇÕES EPISTEMOLÓGICAS DO CONTEÚDO DE FUNÇÕES

O conceito de função é o resultado de uma longa evolução histórica iniciada com os matemáticos Babilônicos e Pitagóricos para encontrar meios que pudessem explicar os fenômenos naturais. “O conceito de função, presente nos mais diversos ramos da ciência, teve sua origem na tentativa de filósofos e cientistas em compreender a realidade e encontrar métodos que permitissem estudar e descrever os fenômenos naturais” (BOTELHO, REZENDE, 2007, p. 65). Porém, nesse período não se havia clareza, pois os conceitos eram simples e apareciam apenas de forma intuitiva.

A partir do século XII, o conceito de função é visto de uma forma “genérica”, pois tratava-se os problemas de forma isolada, ou seja, cada problema tinha a sua solução particular (OLIVEIRA, 1996). Já no século XIV, Nicole Oresme (1323 – 1383) criou uma teoria considerada precursora da representação gráfica das funções, com o objetivo de compreender a natureza das mudanças a partir de representações gráficas, que foi considerado um avanço no conceito de função. Porém, essas representações eram apenas qualitativas, logo não se podia dizer que esse era o conceito de função propriamente. Posteriormente Galileu Galilei (1564 – 1642) introduziu a forma quantitativa e o estudo da variação a partir de leis matemáticas. Entretanto, foi apenas no final do século XVI que se introduziu a ideia de interpretar funções como a relação entre dois conjuntos. Foi nesta época também que Fermat (1601 – 1665) e Descartes (1596 – 1650), “independentemente um do outro, apresentaram o método analítico da introdução das funções, abrindo assim uma nova era na Matemática” (OLIVEIRA, 1996, p. 18).

Conforme Botelho e Rezende (2007), o termo função foi utilizado pela primeira vez em 1673 por Leibniz (1646 – 1716), juntamente com as terminologias de constante, variável e parâmetro. Com o desenvolvimento do estudo de curvas, foi necessário um termo “indicar quantidades que variavam ao longo de uma curva, por exemplo, a tangente” (BOTELHO, REZENDE, 2007, p.70). Com essa finalidade, a palavra função foi adaptada entre 1694 e 1698 por Leibniz e Bernoulli (1667 – 1748). Bernoulli por sua vez publicou em 1718, um artigo contendo a sua definição de função: “Chamamos aqui Função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desta grandeza variável e de constantes” (Rüthing, 1984 apud BOTELHO, REZENDE, 2007, p.70).

Segundo Botelho e Rezende (2007), foi vigorada a identidade da noção de função como expressão analítica, apesar de ela conduzir a incoerências e limitações. Esta noção associada com a noção de continuidade teve sucessivas ampliações e clarificações, que modificaram a sua natureza e significado. A partir da evolução do estudo de funções, surgem muitas aplicações da Matemática nas outras ciências, tendo a função como o modelo matemático que explica a relação entre variáveis.

O estudo de funções passa a ser ensinado no âmbito secundário do Brasil a partir da Reforma Francisco Campos (1932). O diretor do Colégio D. Pedro II, do Rio de Janeiro, professor Euclides Roxo colaborou para esta reforma propondo a unificação da Aritmética, Álgebra e Geometria em uma única disciplina denominada Matemática, na qual tinha a noção de função como elemento articulador destas três áreas da Matemática (MIORIM, 1998).

4.2. CONSIDERAÇÕES DE CARÁTER DIDÁTICO

Considerando o livro didático um meio importante para o desenvolvimento do conteúdo em sala e aula e como parâmetro para o professor se guiar no decorrer das aulas, nesta etapa pesquisamos em três livros didáticos de que forma os conteúdos função afim e função quadrática são abordados no primeiro ano do Ensino Médio.

Os livros são:

a) FILHO, B. B.; SILVA, C. X. da. *Matemática aula por aula.* 1ª edição. São Paulo: Editora FTD, 2003. Volume 1.

b) IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN D.; PÉRIGO R.; ALMEIDA N. de. *Matemática: Ciência e aplicações*. 6ª edição. São Paulo: Editora Saraiva, 2010. Volume 1.

c) DANTE, L. R. Matemática. 1ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2009. Volume único.

O primeiro livro escolhido foi o livro no qual utilizei quando aluno do Ensino Médio. O segundo foi escolhido por ter sido usado durante a minha experiência na disciplina de Estágio em Educação Matemática III em uma turma de 1º ano do Ensino Médio. O terceiro e último livro foi escolhido por ser de volume único, diferente dos demais.

Analisando o primeiro livro, no capítulo de funções, uma abordagem inicial se refere à importância das funções no cotidiano, partindo da noção de alguns conceitos iniciais usualmente abordados como o Diagrama de Venn. No capitulo de função afim, o conteúdo é apresentado como função polinomial de 1º grau. É dado um exemplo de uma situação-problema em que o objetivo é encontrar a expressão algébrica que representa uma função. Repara-se que a partir do exemplo, o capítulo contém apenas exercícios voltados a álgebra, de forma repetitiva, como os do tipo “dê as raízes de uma equação” ou “encontre o valor numérico da função para x = 2”, não trabalhando com problemas que envolvam situações do cotidiano.

Logo após a apresentação de função afim, o autor parte para a construção dos gráficos por meio de substituição de alguns valores na variável fazendo uma tabela. Os exercícios de construções de gráficos não são contextualizados, resumidamente os exercícios são do tipo: “construa os gráficos”. Porém, o livro contém alguns pequenos trechos de uma até duas páginas em que ele aborda o estudo de função afim de uma forma contextualizada enriquecendo as aulas.

No capítulo de função quadrática ela é apresentada na forma $f(x) = ax^2 + bx + c, com\ a,\ b\ e\ c\ \in \mathbb{R}\ e\ a\ \neq 0,$ com três exemplos de representações algébricas com a, b e c diferentes e partindo logo para a construção dos gráficos. Na construção dos gráficos, é primeiramente apresentado com auxílio de tabelas. Logo depois os gráficos são construídos com as raízes e o vértice da parábola. Aparecem alguns exercícios com situações problemas.

No segundo livro analisado, a função afim é apresentada com dois exemplos de situações-problemas semelhantes ao do livro 1. Na parte dos gráficos, o autor começa com um exemplo de construção de gráficos também por tabela, porém com apenas dois valores para substituir a variável x, reforçando a ideia de que dois pontos distintos determinam uma única reta. Os exercícios do livro são abordados em ordem de dificuldade, ou seja, iniciando por exercícios mais fáceis e aos poucos aumentando o nível de dificuldade, tendo como último exercício uma situação-problema. Percebe-se que o autor quer primeiro que o aluno aprenda a forma algébrica para depois envolver o conteúdo no cotidiano.

O livro também apresenta o conteúdo de grandezas diretamente proporcionais, e o autor sugere uma prática de modelagem para ser trabalhada com os alunos. O autor deixa claro o significado dos coeficientes angular e linear e explica o papel deles no gráfico, porém não dá exemplos de como construir gráficos a partir de tais coeficientes.

A função quadrática é apresentada da mesma forma que no livro 1, ou seja, inicialmente de forma algébrica. Vale ressaltar que ao trabalhar com as raízes da equação o autor trata de demonstrar a fórmula da resolução de equações de 2º grau (regra de Bháskara) por completamento de quadrados, assim como ele mostra de onde vêm às fórmulas para encontrar o vértice da parábola a partir da forma canônica da função quadrática representada por $\mathrm{y} = \mathrm{a}\left[\left(\mathrm{x} + \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\mathrm{a}^2}\right]$, e também o porquê da soma e produto de duas raízes.

No terceiro e último livro, a exemplo dos dois primeiros, é dado um exemplo de situação-problema na abordagem inicial da função afim. O diferencial desse livro é que ele tem suas páginas divididas em duas colunas com muita informação em pouco espaço e letras pequenas, o que dificulta a leitura já que as informações estão muito próximas umas das outras. A não ser pelos primeiros exercícios que são de compreensão, o livro contém praticamente exercícios contextualizados. Sobre os gráficos, o livro se assemelha ao primeiro em relação aos exercícios, com exercícios mais algébricos e não contextualizados, com a diferença que o autor se aprofunda mais de forma a relacionar a função afim com a geometria analítica, o que geralmente é trabalhado posteriormente.

Diferente dos outros livros que partiam da definição de função quadrática, este apresenta um problema prático. O zero da função é calculado por completamento de quadrados, e não apenas pela regra de Bháskara. O que diferencia muito este livro dos outros dois é o fato de ele abordar as construções de gráficos pelos movimentos, explorando a forma $y = a(x - m)^2 + k$ e não por pontos e tabelas, convergindo com a nossa proposta de atividade.

Partindo desta breve análise dos livros didáticos, podemos perceber que os três livros abordam os conteúdos de função afim e quadrática de modo semelhante, com exceção do terceiro livro, que aborda o conteúdo de função quadrática diferente dos anteriores. Em relação à construção de gráficos, percebemos que é predominante o uso de tabelas para encontrar pontos nos plano. Consideramos o uso de tabelas uma forma memorizada de encontrar os pontos para depois ligá-los e esboçar o gráfico, não proporcionando ao aluno uma possível relação entre as representações algébricas e gráficas das funções, sendo apenas uma sequência de procedimentos matemáticos para encontrar a solução do problema, neste caso, a construção do gráfico. Relacionando essa forma, de como as construções de gráficos são abordadas, com a Teoria dos Níveis de Sofisticação do Desenvolvimento Cognitivo de David Tall, podemos colocá-las como fazendo parte da etapa de procedimentos, na qual, segundo Franco (2011), é “[...] uma sequência específica de passos que conduzem a outros passos como a utilização de um algoritmo específico para implementar um processo. Seriam a manipulação simples de fórmulas ou regras matemáticas [...]”. Consideramos não ser errado o ensino de funções a partir de tabelas para a construção dos gráficos, porém seria necessário prosseguir com a continuação das etapas dos níveis de sofisticação, para que o desenvolvimento cognitivo do aluno continue sendo aprimorado.

Observamos que os livros trazem exercícios contextualizados com situações problemas em que o cotidiano do aluno é levado em consideração, convergindo de acordo com o Guia do Livro Didático:

> O conceito de função como relação entre grandezas é introduzido, apropriadamente, a partir de exemplos de suas aplicações em situações do cotidiano [...]. Conceitos e propriedades, como zeros de função, função crescente e decrescente, são apresentados a cada vez que um novo tipo de função é definido, tornando o estudo um pouco extenso e repetitivo. (BRASIL, 2012, p. 86)

Em relação às funções quadráticas, temos como exceção do terceiro livro, que aborda a construção dos gráficos de função quadrática da mesma forma que queremos abordar nas nossas atividades, que são pelos movimentos do gráfico.

A utilização de softwares que podem contribuir para o enriquecimento das aulas e compreensão dos conteúdos não foi mencionada em nenhum dos três livros analisados. A tecnologia está cada vez mais presente na vida do aluno e a escola precisa acompanhar essa transformação. "Nossas rotinas de sala de aula também deveram incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas também influenciam nas nossas formas de pensar, de aprender, de produzir" (GRAVINA, BASSO, p.12, 2012).

O livro didático é uma ferramenta importante para o desenvolvimento do conteúdo em sala de aula, mas não é o único recurso para o professor, como salientado no PCN:

> Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática. O uso dessa diversidade é de fundamental importância para o aprendizado porque tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmeras, computadores e outros equipamentos não são só meios. Dominar seu manuseio é

> também um dos objetivos do próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. (BRASIL, 2000, p. 53)

Uma aula em ambiente diferente como o laboratório de informática pode interessar mais o aluno além de poder proporcionar a ele uma compreensão diferente da habitual. A familiarização do aluno com o computador e a tecnologia pode favorecer a aproximação dele com os conteúdos abordados.

4.3. CONTRIBUIÇÕES DE CARÁTER COGNITIVO

Neste item, temos como objetivo identificar as principais dificuldades dos alunos no aprendizado do conteúdo de funções afins e quadráticas, assim como a forma que o conteúdo foi apresentado a eles. Para isso, foi elaborada uma atividade inicial, na qual denominamos "atividade prévia" (ver apêndice A), tendo como foco o conhecimento prévio do aluno. Esta atividade foi aplicada antes da sequência didática, com propósito de identificarmos as principais dificuldades dos alunos, assim como os erros cometidos ao resolverem questões que envolvem gráficos de funções afins e quadráticas. Nessas circunstâncias, foram propostas algumas questões que envolvem a construção de gráficos.

Na primeira questão, queríamos verificar de que forma os alunos aprenderam a construir gráficos de funções afins. A segunda questão foi elaborada para saber se os alunos tinham conhecimento dos coeficientes angular e linear da função afim assim como as suas funções no gráfico. Na terceira questão, também queríamos verificar de que forma os alunos construíam gráficos, mas desta vez de funções quadráticas. Com a quarta questão, pretendíamos saber se o aluno consegue verificar a lei da função que origina de seus gráficos. Na quinta questão, os alunos deveriam encontrar o ponto de intersecção dos gráficos de duas funções. Na sexta e última questão, queríamos verificar se os alunos conseguiam verificar em qual domínio as funções estavam limitadas. Todas estas questões, além de nos apoiar na elaboração da sequência didática, nos serviram como parâmetro para, ao término da aplicação da sequência didática, analisarmos se houve evolução no entendimento do conteúdo por parte dos alunos.

Vale ressaltar que os conteúdos envolvidos nesta atividade já foram trabalhados em sala de aula no 1º ano do Ensino Médio. A atividade prévia foi aplicada para vinte e cinco alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio da Escola Técnica Irmão Pedro em Porto Alegre.

4.3.1. Análise da atividade prévia

Nesta etapa realizou-se a análise da atividade prévia que continha seis questões envolvendo conceitos de construções de gráficos de funções afim e quadrática. Os alunos tiveram o tempo de 50 minutos para resolver as atividades da forma que eles sabiam, sendo que a atividade não valia nota e eles poderiam resolvê-las da maneira que conseguissem. Isso fez com que os alunos ficassem mais a vontade para resolver as questões. Observou-se que nem todos os alunos resolveram todas as questões, a maioria por não saber o conteúdo e alguns por falta de tempo.

Na primeira questão, os alunos que a resolveram a fizeram utilizando o método da tabela para testar pontos na função e achar a coordenada no plano cartesiano para construir o gráfico. Vejamos a figura 2 a resolução de um aluno que apresentou os cálculos para construir os gráficos.

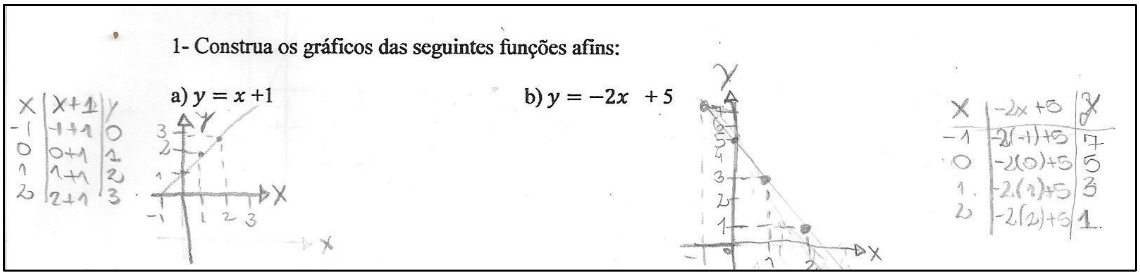
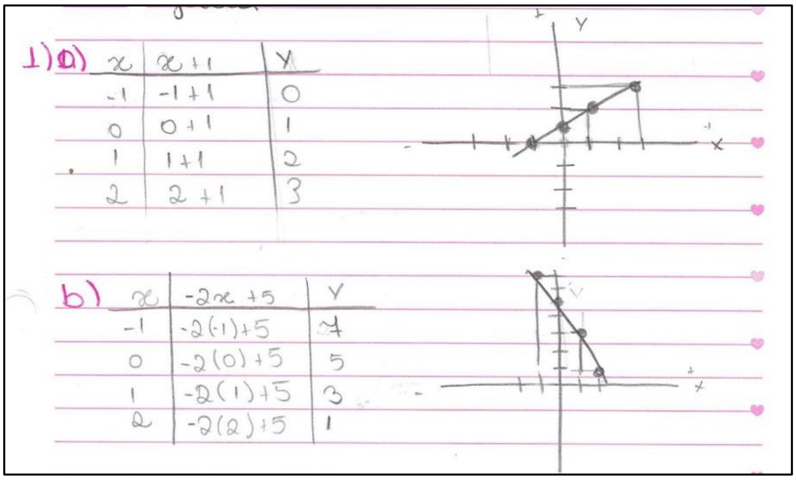


Figura 2 - resolução da questão 1 apresentada por um aluno

Pode-se notar a importância que os alunos dão para os cálculos, alguns resolveram em uma folha separada para poder entregar, assim como mostra a figura 3, em que os cálculos estão em uma folha de caderno.


1) a)

x	x+1	y
-1	-1+1	0
0	0+1	1
1	1+1	2
2	2+1	3

b)

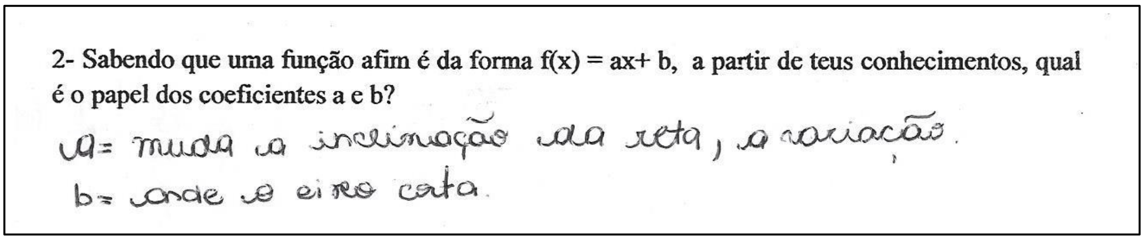
x	-2x+5	y
-1	-2(-1)+5	7
0	-2(0)+5	5
1	-2(1)+5	3
2	-2(2)+5	1

Figura 3 - resolução da questão um em uma folha de caderno para entregar os cálculos organizados.

Essa é uma característica geral, visto que nenhum dos alunos resolveu as questões sem apresentar cálculos, quando estes fossem necessários.

O fato dos alunos representarem os gráficos das funções a partir de tabelas possivelmente pode dificultar a relação da forma algébrica com a sua forma gráfica, pois este procedimento resulta em encontrar pares ordenados atribuindo valores para o x e achando a sua imagem correspondente, tendo em vista que com apenas dois pontos é possível construir o gráfico de uma reta. Sendo assim, é possível observar que a construção por tabelas limita os alunos em apenas conhecer alguns valores da função para encontrar pontos para depois ligá-los.

Na questão dois, podemos perceber que os alunos, com poucas exceções, não sabem a função dos coeficientes angular e linear no gráfico, em consequência, não relacionam a forma algébrica e a forma gráfica de uma função, já que a maioria dos alunos deixou esta questão em branco e apenas três alunas responderam de forma satisfatória. Na figura 4 temos a resposta da questão 2 dada por um dos alunos.

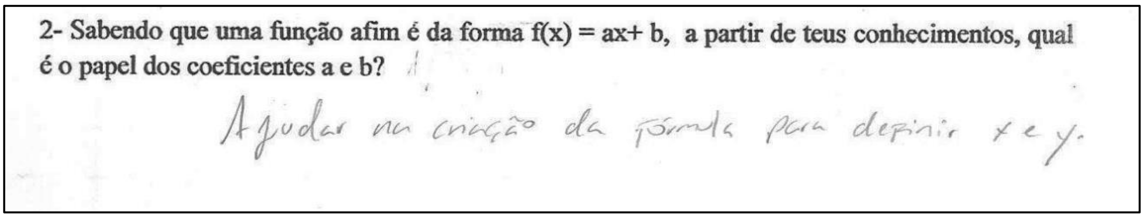

2- Sabendo que uma função afim é da forma f(x) = ax+ b, a partir de teus conhecimentos, qual é o papel dos coeficientes a e b?

a= muda a inclinação da reta, a variação.
b= onde o eixo corta.

Figura 4 - resposta da questão 2 dada por uma aluna.

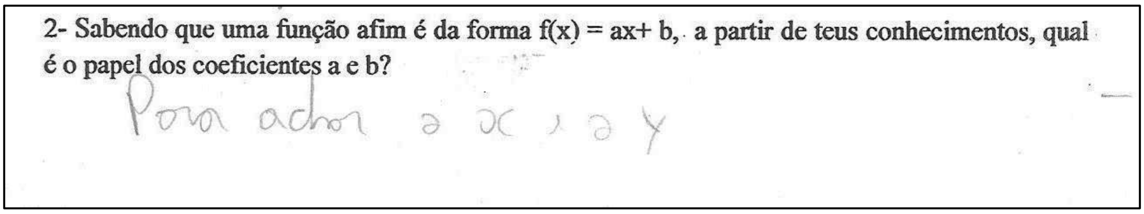
Apesar da resposta da aluna em relação a função do coeficiente linear, representado pela letra b, estar escrita de forma incompleta, entendemos que a aluna quis dizer que o b representa a ordenada correspondente em que a reta intersecciona o eixo y.

Com exceção dessas três alunas, tivemos mais duas respostas em que podemos observar que os alunos tentaram responder da forma que sabiam e os outros alunos deixaram esta questão em branco. Nas figuras 5 e 6 podemos ver as respostas dos alunos.


2- Sabendo que uma função afim é da forma f(x) = ax+ b, a partir de teus conhecimentos, qual é o papel dos coeficientes a e b?

Ajudar na criação da formula para definir x e y.

Figura 5 - Resposta da questão 2 de um aluno


2- Sabendo que uma função afim é da forma f(x) = ax+ b, a partir de teus conhecimentos, qual é o papel dos coeficientes a e b?

Para achar a x e a y

Figura 6 - Resposta da questão 2 de um aluno

O que podemos observar é que o método de resolução utilizado pelos alunos é por tabelas e levando em conta suas produções, não há uma ênfase na análise dos coeficientes de uma função afim para a construção dos gráficos. Defendemos que o estudo desses coeficientes pode gerar uma melhor compreensão ao aluno na construção dos gráficos, pois, a partir de seu estudo, ele pode identificar o comportamento de uma função e traçar seu gráfico.

Na terceira questão os alunos tinham que construir gráficos de funções quadráticas a partir de funções escritas na forma canônica. Conseguimos concluir que provavelmente os alunos não tinham visto uma função de segundo grau na sua forma canônica para a construção de gráficos. Poucos alunos responderam esta questão, porém não foi a partir dos movimentos dos gráficos e também não foi a partir das raízes,ou das coordenadas do vértice que os alunos construíram os gráficos. Eles construíram da mesma forma que foi abordada na primeira questão, ou seja, por tabelas, substituindo valores que estão no domínio para encontrar os respectivos valores de y. Vejamos na figura 7 como um aluno construiu os gráficos das funções quadráticas.

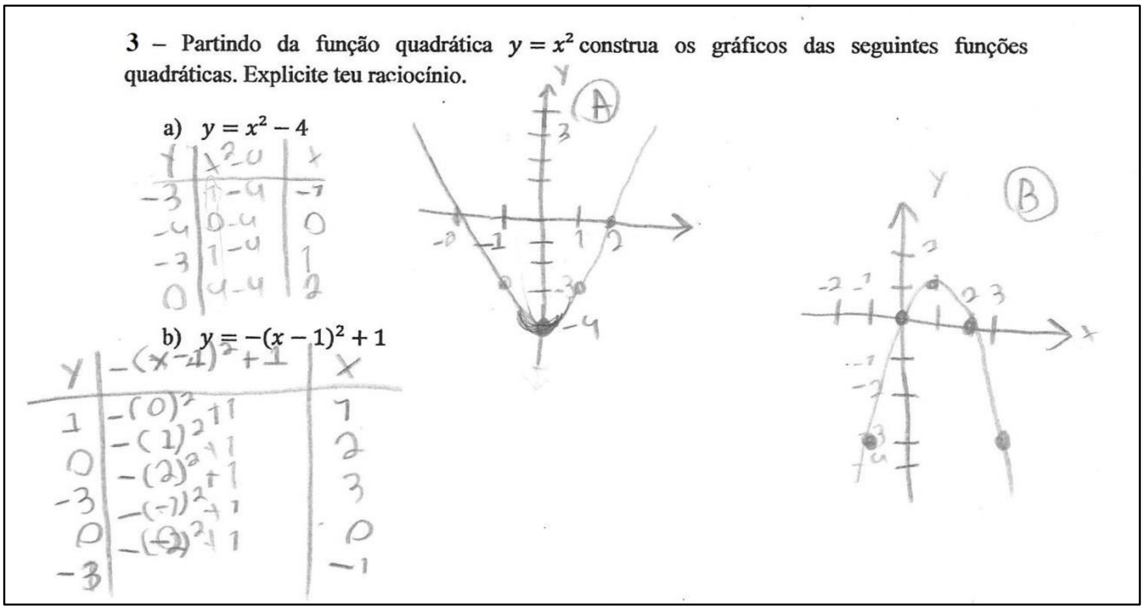


Figura 7 - construção dos gráficos de função quadrática feitas por um aluno

Pelo que foi possível observar na análise didática, as construções de gráficos de função quadrática são abordadas dando ênfase às raízes da equação, às coordenadas do ponto de vértice e o ponto de intersecção da curva com o eixo y, para posteriormente proceder à construção da parábola. Porém, novamente os alunos utilizaram o método de tabelas. Acreditamos que esse método seja, possivelmente, um procedimento de memorização, no qual basta que o aluno dê valores para x para encontrar a imagem correspondente para depois marcar os pontos no plano cartesiano, impossibilitando a análise da relação entre a forma algébrica da função com o seu gráfico.

Na quarta questão, todos os alunos a deixaram em branco. Acreditamos que os alunos não tiveram ferramentas suficientes para encontrar os coeficientes angulares e lineares, sendo assim, não puderam relacionar a representação gráfica que eles tinham com a representação algébrica que eles deveriam encontrar através dos gráficos.

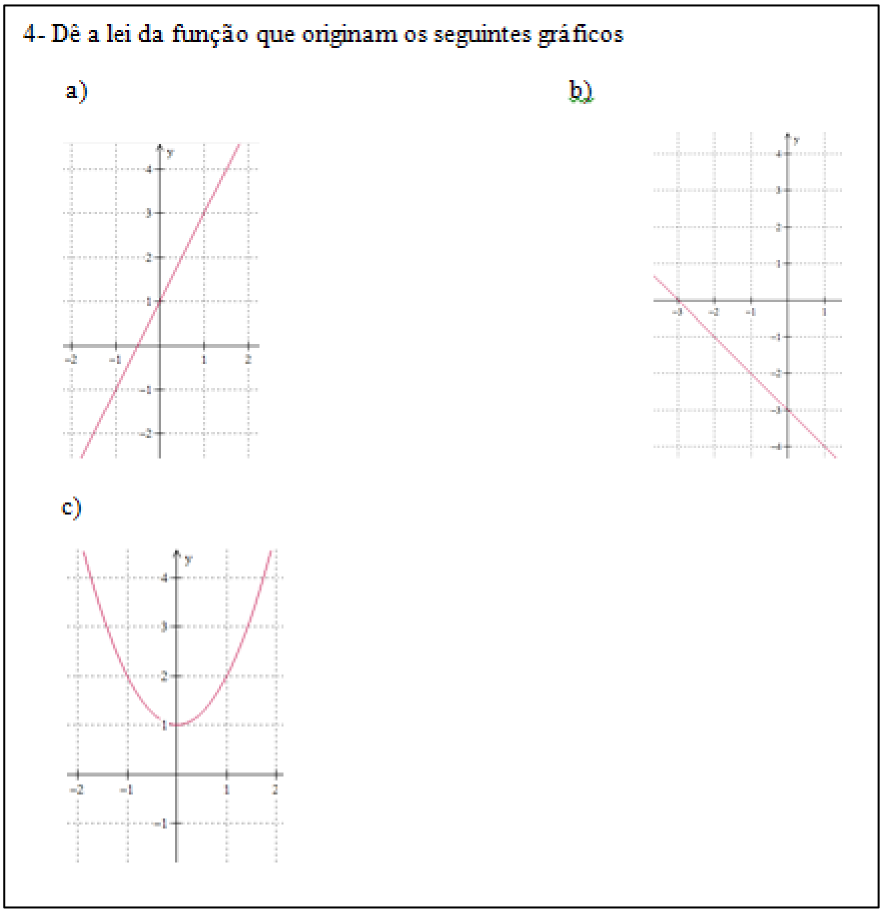


Figura 8 - Questão 4 da análise prévia

Na questão 5, os alunos deveriam encontrar os pontos de intersecção, comum às duas funções. Alguns alunos conseguiram encontrar os pontos, igualando as duas funções, encontrando o valor de x e substituindo-o em uma das funções para encontrar o valor de y. Outros alunos encontraram apenas o valor de x. Vejamos na figura 9 em que o aluno faz apenas a letra a) da questão 5 encontrando o ponto com as coordenadas x e y e a figura 10 em que o aluno encontra apenas o valor de x.

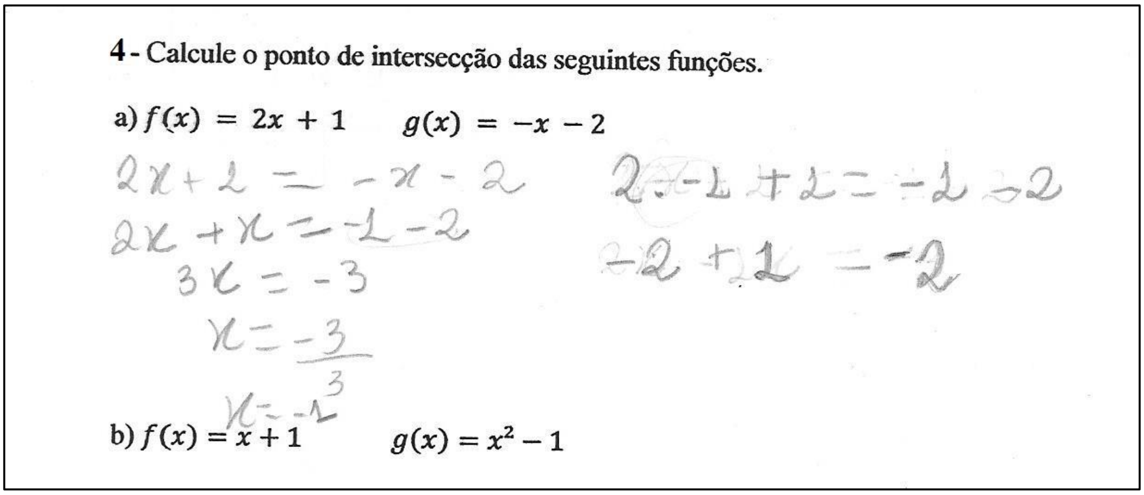


Figura 9 - questão 5 letra a de um aluno.

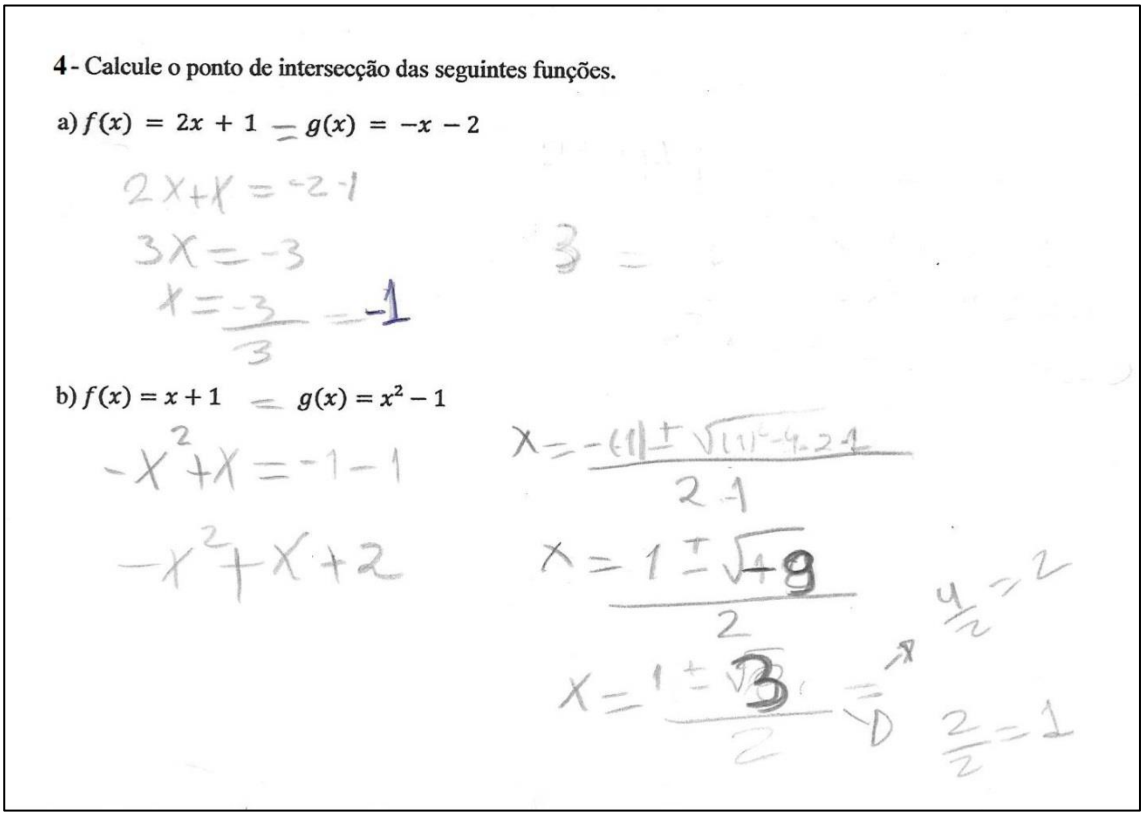


Figura 10 - resposta da questão 5 de um aluno.

Nesta questão, os alunos utilizaram o procedimento algébrico para resolvê-la. Acreditamos que os alunos que resolveram esta questão tenham sido ensinados dessa forma e, possivelmente, não entendam o porquê de esse método funcionar para encontrar o ponto de intersecção entre as funções. Até mesmo porque a maioria dos que a resolveram apenas igualaram as equações para encontrar o valor de x, esquecendo-se de substituir o resultado encontrado para obter a coordenada y.

Na última questão, encontrar o domínio não foi um problema para eles, a maioria dos alunos conseguiu resolver sem problemas, o que nos mostra que não há dificuldades para o aluno em restringir o domínio de uma função.

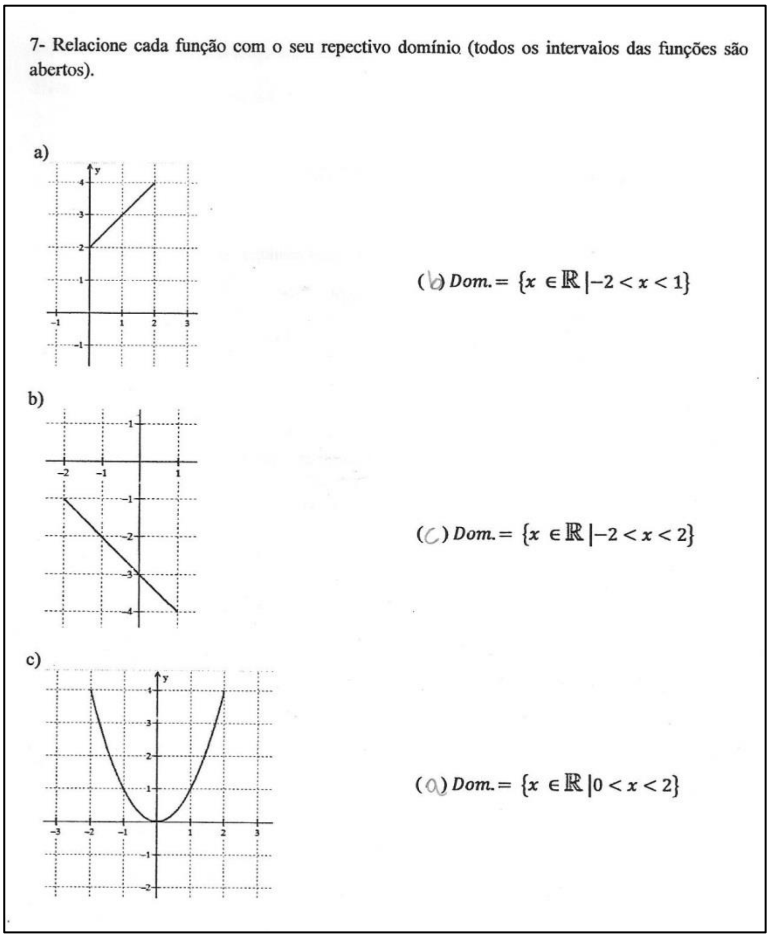


Figura 11 – Questão 6 da análise didática resolvida por um aluno

Pelas observações feitas da análise prévia, podemos constatar que, em geral, os alunos tiveram dificuldades em construir os gráficos das funções, e isso se deve ao método de construção, como já foi observado.

Verificando os resultados de pesquisas feitas anteriormente sobre este assunto, como em Gauto (2012) e Bolejo (2009), observamos que estão de acordo em comparação aos resultados da nossa pesquisa, mostrando que os alunos encontram dificuldades em relacionar a forma algébrica de uma função com a sua forma gráfica.

Visando as análises feitas acima, acreditamos que o uso do computador possa auxiliar os alunos em relação ao ensino de funções afins e quadráticas, como um recurso para que os eles possam estabelecer relações entre as representações algébricas e as suas representações gráficas das funções.

5. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI*

Após as análises de como o estudo de funções foi se desenvolvendo ao longo dos anos e a forma que os livros didáticos abordam este conteúdo, elaboramos um sequência de atividades didáticas envolvendo o estudo de funções. O principal objetivo desta proposta é abordar o estudo de funções afim e quadrática de forma que os alunos possam assimilar alguns conceitos que possivelmente não foram compreendidos por eles pelos métodos tradicionais. Para isso, elaboramos uma proposta na qual acreditamos que as atividades se tornem atrativas para os alunos e que o ensino de funções afim e quadrática possa levar a novos patamares de compreensão.

Como observado na análise didática, geralmente os exercícios propostos para a construção de gráficos de funções afins e quadráticas são resolvido por tabelas. Este tipo de resolução tem por finalidade encontrar coordenadas de pontos pertencentes ao gráfico das funções para posteriormente ligá-los de tal forma que construa uma reta (função linear) ou uma parábola (função quadrática), dificultando a análise do comportamento do gráfico quando relacionado com a sua forma algébrica. Para tentarmos resgatar esse conceito na qual o aluno deve relacionar as forma gráfica com a forma algébrica de uma função, elaboramos uma proposta de ensino em que utilizamos como recurso o software Winplot.

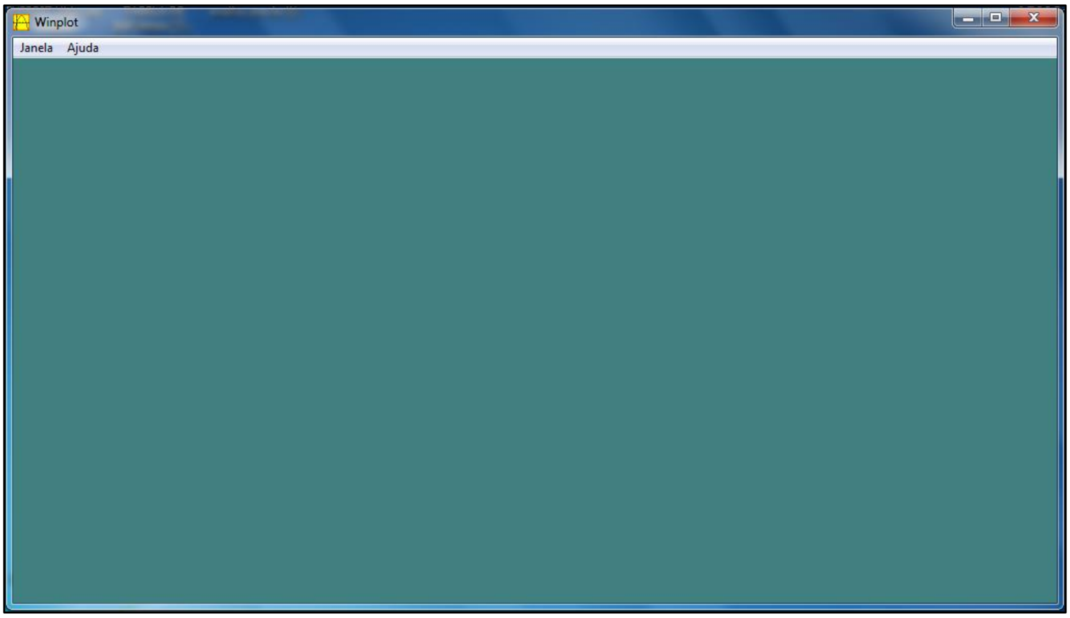


Figura 12 - Interface do Winplot

O Winplot é um programa que foi criado com a finalidade de colaborar no estudo de funções permitindo a construção de gráficos. Além disso, é possível utilizar o procedimento que o software disponibiliza “superfície de revolução”, para que possamos aplicar os gráficos construídos em algumas atividades envolvendo superfícies em contextos particulares.

> Para trabalhar com os conteúdos clássicos de função e gráficos (funções afim, quadrática, trigonométricas, entre outras) temos o software *Winplot*. Para além deste uso, vamos defender a ideia de que é possível trabalhar no Ensino Médio com o conceito de superfície, em contextos particulares. [...] (GRAVINA, BASSO, 2012, p. 21)

Além do potencial que o software Winplot tem em relação ao estudo de gráficos de funções, é importante salientar que ele é um software “leve”, ou seja, funciona em diversos computadores sem perder a sua eficiência, tendo também como vantagem a de ser um software livre.

Na análise prévia, foi possível detectar a dificuldade dos alunos em relacionar os gráficos das funções com as suas respectivas leis de formação. Acreditamos que, com o auxílio do software, o ensino de funções afins e quadráticas pode ter consideráveis auxílios no desenvolvimento cognitivo dos alunos.

> A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas que descortinam na tela do computador a objetos dinâmicos e manipuláveis. E isso vem mostrando interessantes reflexões nas pesquisas em processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo nossa quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes. (GRAVINA, BASSO, 2012, p.13)

Defendemos o uso do software também como um facilitador. Boa parte dos gráficos esboçados pelos alunos não são muito precisos, dificultando a sua leitura. O software torna o trabalho de construir um gráfico mais rápido, facilitando também a visualização do desenho.

Uma das características presente na nossa proposta de ensino é o trabalho em duplas ou trios. Acreditamos que o aluno trabalhando em conjunto pode contribuir na troca de ideias e debater questões presentes sobre conteúdo, dando a sua opinião e ouvindo os colegas. Vemos o trabalho em conjunto como uma mudança de característica da aula, onde o aluno deixa de copiar matéria e fazer exercícios no caderno e consegue passar para um ambiente no qual ele pode ampliar a sua capacidade de criar e desenvolver o seu conhecimento junto aos colegas de grupo. Neste ambiente de interação, por não estarem sendo avaliados, alguns alunos que podem ser mais tímidos, ou sentem medo de falar por ainda não terem confiança em suas opiniões, talvez se sintam mais a vontade de apresentar as suas ideias, enriquecendo o debate entre eles e contribuindo na aprendizagem coletiva.

Nosso plano de ensino foi elaborado na forma de uma sequência de atividades, desenvolvidas em três encontros, com duração de uma hora e quarenta minutos (dois períodos). As atividades foram realizadas no laboratório de informática da Escola Técnica Estadual Irmão Pedro, localizada no bairro Floresta em Porto Alegre, com uma turma de segundo ano do Ensino Médio.

5.1. HIPÓTESES

Durante a construção da sequência didática, algumas previsões a respeito do comportamento dos alunos foram necessárias. Para isso foram formuladas hipóteses de como os alunos se comportariam perante a resolução das situações didáticas propostas.

A proposta foi planejada pra que os alunos pudessem compreender o comportamento de gráficos de funções afim e quadrática com o auxílio do software Winplot. Organizamos a nossa sequência de atividade de modo que os alunos pudessem interpretar os símbolos matemáticos presentes nas formas algébricas das funções trabalhadas, relacionando com as figuras construídas no software, com o objetivo de tornar a aula mais dinâmica em um ambiente informatizado, diferente do habitual. Assim como fugir das características de uma aula tradicional na qual o professor transmite o conhecimento e proporcionar ao aluno as oportunidades necessárias para que ele construa gradativamente o conhecimento ao percorrer das atividades.

Queremos incentivar a inserção dos alunos em um ambiente informatizado, de modo que eles percebam que o computador pode ser utilizado como uma importante ferramenta de aprendizagem. “No que segue apresentamos ferramentas que, quando colocadas nas mãos de alunos, podem provocar mudanças na sala de aula” (GRAVINA, BASSO, 2012, p. 13).

Todas as etapas das atividades foram propostas para serem trabalhadas em duplas. Os alunos, em busca da solução do problema, interagem com os colegas sobre qual a melhor maneira de encontrar a solução, oportunizando uma construção coletiva do conhecimento, através de trocas de ideias.

A cada etapa, foram sugeridos questionários com perguntas que deveriam ser respondidas pelos alunos, durante e após a resolução das atividades, com a finalidade de que os alunos explicassem o raciocínio para justificarem as construções no software. Esse questionário foi utilizado para analisarmos a validação da proposta.

Propomos as etapas da sequência didática para que as etapas de *procedimento*, *processo* e *proceito* de David Tall, citadas no capítulo dois, estejam presentes no decorrer das atividades. A seguir, listamos as hipóteses levantadas para cada etapa da sequência, com o intuito de, posteriormente, compará-las com os resultados obtidos, validando ou não a Engenharia Didática.

5.1.1. Etapa 1

Na primeira etapa elaboramos duas atividades nas quais os alunos deveriam relacionar os gráficos das funções afins, atividade 1, e quadráticas, atividade 2, com as suas formas algébricas. Nestas atividades, o aluno se encontra na etapa de *procedimentos* de Tall, ou seja, acreditamos que o aluno fará a relação entre os gráficos e suas respectivas leis algébricas de forma que ele ainda não compreenda o papel dos coeficientes a e b da função $f(x) = ax + b$ e os coeficientes a, m e k da forma canônica da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$, por completo. Porém ele saberá que as mudanças dos coeficientes farão alterações na posição dos gráficos a partir de exemplos mas não compreendendo de forma generalizada.

Ao término de cada atividade, organizamos uma discussão analisando cada um dos gráficos e suas respectivas formas algébricas. Nessas discussões, pretendemos iniciar a segunda etapa dos níveis de sofisticação, a etapa de *processos*, sendo assim, nossa hipótese perante essa discussão seja que os alunos consigam perceber as funções dos coeficientes nos gráficos. Nosso trabalho nessa discussão será o de instigar os alunos, elaborando perguntas que os façam pensar em possibilidades e opiniões diversas entre eles, para que enfim cheguem a uma resposta.

Uma hipótese que tivemos, é que poderia atrapalhar um pouco o decorrer do desenvolvimento das atividades, é a dificuldade dos alunos em utilizar o software, já que é um recurso novo para eles.

5.1.2. Etapa 2

Na segunda etapa, elaboramos a atividade 3, no intuito de os alunos conseguirem identificar quais gráficos geraram as superfícies de revolução. Nesta atividade, os alunos ainda se encontram na etapa de processo, ou seja, os alunos terão o foco voltado para os conceitos matemáticos envolvido nas atividades, mas o raciocínio não será tão complexo como na próxima etapa. Nesta etapa, eles trabalharão com os coeficientes das funções separadamente, uma a uma, para posteriormente, na próxima etapa, trabalharem com eles ao mesmo tempo.

Em cada item dessa atividade, o aluno terá que reconhecer qual coeficiente da forma algébrica está sendo modificado para que a forma gráfica possa geral tal superfície de revolução. Para isso, o aluno terá um espaço para esboçar o gráfico gerador daquela superfície e, posteriormente, analisar as mudanças de um gráfico para o outro, para enfim verificar qual coeficiente está mudando para construir as funções geradoras da superfície.

Esperamos que a utilização de superfícies de revolução no winplot estimule os alunos por ser um recurso novo para eles e que, consequentemente, os desafie e os estimulem a construí-las.

5.1.3. Etapa 3

Na última etapa, elaboramos a atividade com o objetivo de que eles consigam representar uma imagem de um objeto real utilizando superfícies de revolução. Nesta atividade o aluno se encontrará na etapa denominada por Tall como *proceitos*. Nesta etapa para Tall, o aluno deverá relacionar a construção de uma reta ou uma parábola com os seus símbolos que são representados pela sua forma algébrica, ou seja, os coeficientes passam a se tornar símbolos para o aluno, que tem como significado as equações que eles exercem sobre o gráfico.

Esta atividade tem como diferencial a necessidade de encontrar o gráfico de uma função que possa gerar uma superfície que represente a imagem escolhida pelo aluno. Para isso o aluno deverá colocar o gráfico que ele quiser construir na posição desejada, com a inclinação, no caso de uma reta, ou a abertura, no caso de uma parábola, necessárias para o sucesso da construção, diferente da etapa anterior, na qual o aluno trabalhava os coeficientes separadamente, com gráficos já pré-estabelecidos. Nesta atividade, queremos que os alunos consigam reconhecer os papéis dos coeficientes no gráfico. Acreditamos que nessa etapa os alunos consigam visualizar os coeficientes como símbolos que representam os movimentos dos gráficos, possibilitando a eles uma forma de fazer a relação da forma gráfica com a forma algébrica das funções.

6. EXPERIMENTAÇÕES

As atividades foram realizadas em três etapas de dois períodos cada e utilizamos para o andamento da experimentação a sala de informática da Escola Técnica Irmão Pedro. A turma continha vinte e oito aluno e todos foram convidados para participar das atividades.

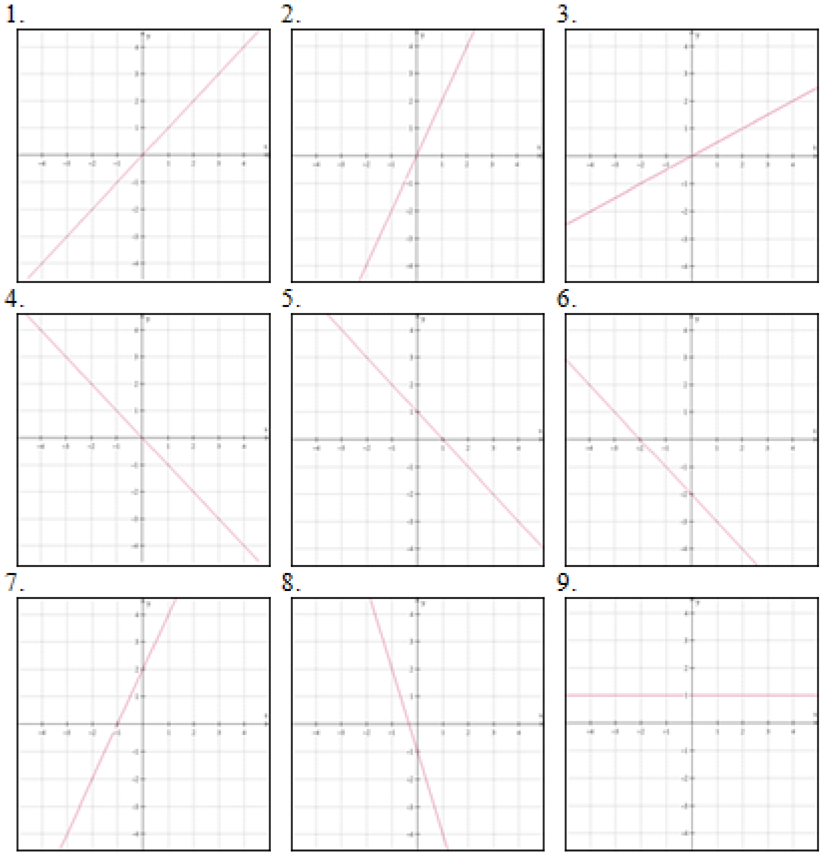
Antes mesmo de começarmos as etapas da nossa sequência didática, foram realizadas duas aulas preparatórias para que pudéssemos aplicar a nossa atividade. A primeira aula foi necessária para que os alunos pudessem aprender a utilizar o software e o recurso de “superfície de revolução”. Para isso, os alunos receberam um tutorial do software Winplot (ver apêndice B) para poder acompanhar a explicação sobre o Winplot e posteriormente utilizar quando houvesse dúvidas sobre o mesmo. Na segunda aula, trabalhamos com os alunos a forma canônica da equação quadrática. Achamos importante mostrar como encontramos a forma canônica, já que utilizaremos para trabalharmos com a representação gráfica da função de segundo grau.

6.1. RELATO ETAPA 1

A atividade (ver apêndice D) foi realizada no laboratório de informática da escola. Inicialmente, foi pedido aos alunos que se organizassem em duplas. Como os alunos costumam se organizar por afinidade, observou-se a formação de um trio.

Na etapa, a primeira atividade foi dividida em duas partes. A primeira, os alunos devem relacionar gráficos de funções afins com as suas respectivas formas algébricas. A seguir, na figura 13 a primeira parte da atividade.

Atividade 1: Relacione os gráficos de funções afins com as suas respectivas representações algébricas.



( ) $f(x) = -x$ ( ) $f(x) = \frac{x}{2}$ ( ) $f(x) = -x - 2$

( ) $f(x) = -x + 1$ ( ) $f(x) = 1$ ( ) $f(x) = 2x + 2$

( ) $f(x) = x$ ( ) $f(x) = -3x - 1$ ( ) $f(x) = 2x$

Figura 13 - Atividade 1 da etapa 1

Depois de concluída a primeira parte da atividade, os alunos tiveram que fazer uma comparação entre os gráficos para observar as mudanças de um gráfico para o outro a partir de suas leis algébricas. Em seguida na figura foi solicitado aos alunos que respondessem a questão presente no questionário 1, como pode ser visto na figura 14.

Questionário 1:

Após o que foi discutido em relação aos movimentos dos gráficos de função afim, escreva com as suas palavras sobre o papel dos coeficientes da função $f(x) = ax + b$.

Figura 14 - Questionário 2 da etapa 1

Nesta atividade, propomos aos alunos que eles relacionassem os gráficos das funções afins com as suas formas algébricas com auxílio do software. Pedimos aos alunos para que, quando eles colocassem as equações no software, começassem pela função y = x, e na sequência, editassem a equação colocando o coeficiente desejado, observando o movimento que a reta fez em comparação com a função inicial. Nesta etapa, os alunos não tiveram muitos problemas para fazer essas relações, já que nesta parte da atividade, eles utilizaram os procedimentos necessários para a resolução da atividade.

Visto que os alunos estão familiarizados com tabelas para a construção de um gráfico de função afim, procedimento esse que não facilita a relação da forma gráfica com a sua forma algébrica, precisávamos apresentar aos alunos um modo na qual eles conseguissem fazer esta relação, através de seus coeficientes angular e linear. Para isso, criamos um debate com os alunos, instigando-os a pensarem nos movimentos dos gráficos em relação às suas leis algébricas. Propomos à eles observar cada um dos gráficos e ver as diferenças de um gráfico para o outro, visualizando também as mudanças das leis das funções, fazendo uma relação entre elas.

Expliquei a eles que a função y = x seria a nossa função principal e ela serviria como parâmetro para verificar os movimentos de todas as outras funções. A primeira relação feita foi entre o gráfico 1 e o gráfico 2 da atividade 1. Foi perguntado à eles qual a diferença entre os dois gráficos. Um dos alunos disse: “um cresce mais rápido que o outro”, enquanto outro aluno disse que “a inclinação mudava”. Referente a esses comentários, perguntei para eles o que mudava na forma algébrica dele, e logo foi respondido que havia o número dois multiplicando eles. Sendo assim, perguntei qual era a função desse número dois no gráfico. Os alunos ficaram em silêncio, então resolvi ajudá-los. Perguntei: “na primeira função, quando pegamos o intervalo de 0 a 1, quantas unidades ele cresce no eixo y?”, logo os alunos responderam que subia uma unidade, “e no segundo gráfico, quando escolhemos o intervalo de 0 a 1 do eixo x, quantas unidades ele cresce no eixo y?”. Logo, um aluno respondeu que cresciam duas unidades. “E no intervalo de 0 a 2?”. Outro aluno respondeu que crescia quatro unidades. Perguntei a eles que, seguindo esse raciocínio, quantas unidades subiriam se tivéssemos a função y = 3x no intervalo de 0 a 1. Os alunos ficaram em silêncio, reforcei a pergunta e um deles respondeu de forma interrogativa: “três?”. Confirmei a resposta e um dos alunos perguntou: “então o número que vai do lado do x multiplicando vai inclinar a reta?”. Respondi que sim e ao mesmo tempo, completando que, dependendo do número que multiplica o x, será o número de unidades que o gráfico irá crescer no eixo y, para intervalo de uma unidade que ele for para a direita.

Fizemos então a comparação entre os gráficos 1 e 3. Seguindo o mesmo raciocínio da primeira comparação, os alunos chegaram a conclusão que se um número entre 0 e 1 multiplicasse o x, a função iria crescer mais lentamente em comparação com o gráfico da função y = x.

Quando fomos analisar o gráfico um com o gráfico quatro, um aluno já saiu na frente e perguntou: “essa é negativa, né “sor”?”. Eu respondi que ele estava correto, e perguntei a eles como chamávamos uma função que tinha como coeficiente angular um número negativo. Logo, recebi resposta de mais de um aluno, que se chamava decrescente.

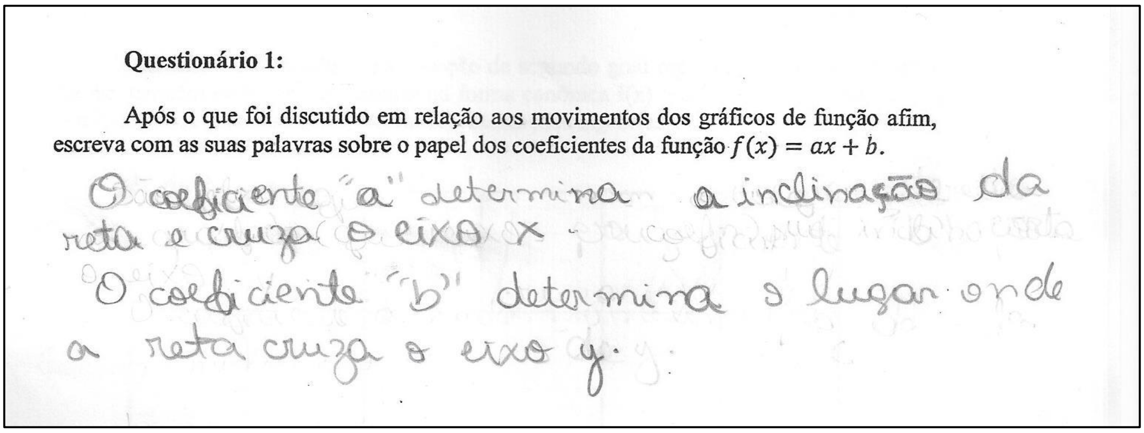
Comparando agora, o primeiro gráfico com os gráficos cinco e seis, os alunos perceberam que a inclinação era a mesma do gráfico número quatro, já que o coeficiente angular era um e negativo, mas que o gráfico se “movimentava”. As translações dos gráficos cinco e seis causaram um debate em sala de aula. Os alunos notaram que o gráfico cortava o eixo y no número um e no número seis respectivamente, todavia também cortavam no eixo x nos números um e no número seis. Essa dúvida só foi cessada por eles no sétimo gráfico.

Na comparação do gráfico um com o gráfico sete, os alunos puderam observar que, mudando o coeficiente angular, era possível perceber que o coeficiente angular identifica o ponto do eixo y em que o gráfico corta, já que a função tem coeficiente angular dois e a reta corta no ponto dois do eixo y.

No oitavo gráfico, os alunos já foram capazes de fazerem praticamente sozinhos. Perguntei a eles “por que o gráfico poderia ser representado pela função y = -3x – 1?”. Depois de um tempo que eles ficaram pensando um aluno respondeu: “só sei que o coeficiente linear é -1”. Respondi que estava certo e perguntei sobre o coeficiente angular, e disse para eles lembrarem o intervalo de 0 a 1. A resposta consequente foi: “menos porque a reta é decrescente e três porque no intervalo de 1 a 0 ele “desceu” três unidades”. Foi possível perceber que os alunos já estavam conseguindo fazer a relação entre os coeficientes e o comportamento das retas, ou pelo menos, sabiam quais os papeis dos coeficientes angular e linear.

Na verificação do nono gráfico, perguntei o que eles conseguiam falar sobre os coeficientes angular e linear. Os alunos por sua vez, souberam explicar apenas o coeficiente linear que era um. Para ajudá-los perguntei para eles se existia inclinação em comparação com o eixo x. Eles responderam que não, e se deram conta de que o coeficiente angular não existia, já que a variável x não estava presente na função. Sendo assim, expliquei para eles que aquela era uma função “constante, já que a coeficiente angular é zero”.

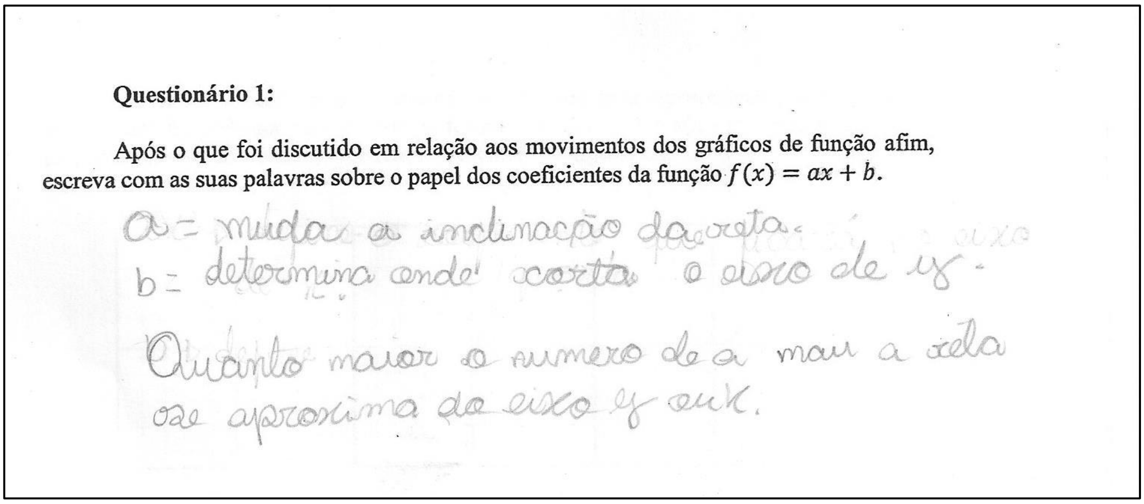
Depois desta discussão, os alunos responderam a questão do questionário 1. Com as palavras deles, eles escreveram as funções dos coeficientes a (angular) e b (linear). Na sequência, algumas das respostas que os alunos escreveram no questionário:


Questionário 1:

Após o que foi discutido em relação aos movimentos dos gráficos de função afim, escreva com as suas palavras sobre o papel dos coeficientes da função $f(x) = ax + b$.

O coeficiente "a" determina a inclinação da reta e cruza o eixo x.
O coeficiente "b" determina o lugar onde a reta cruza o eixo y.

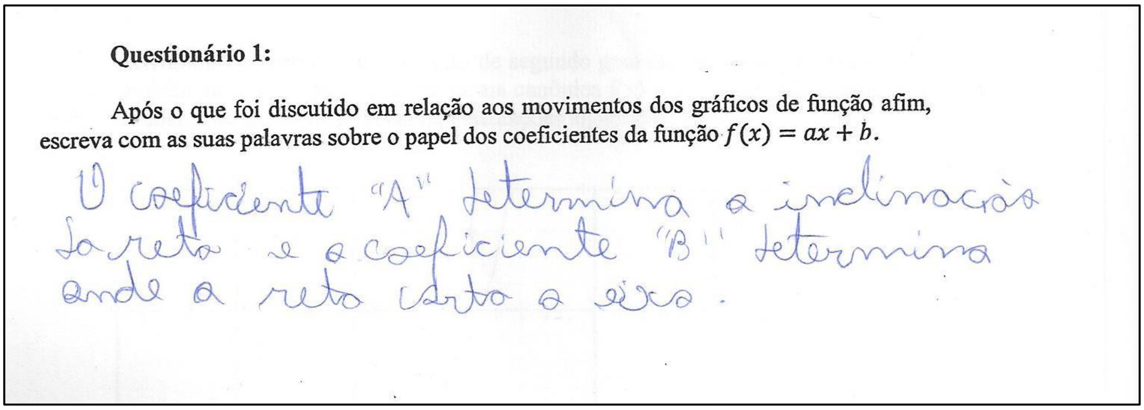
Figura 15 - resposta da questão 1 da atividade 1 dada por uma das duplas


Questionário 1:

Após o que foi discutido em relação aos movimentos dos gráficos de função afim, escreva com as suas palavras sobre o papel dos coeficientes da função $f(x) = ax + b$.

a = muda a inclinação da reta.
b = determina onde corta o eixo de y.
Quanto maior o numero de a mais a reta se aproxima do eixo y ou x.

Figura 16 - resposta da questão 1 da atividade 1 dada por uma das duplas



Questionário 1:

Após o que foi discutido em relação aos movimentos dos gráficos de função afim, escreva com as suas palavras sobre o papel dos coeficientes da função $f(x) = ax + b$.

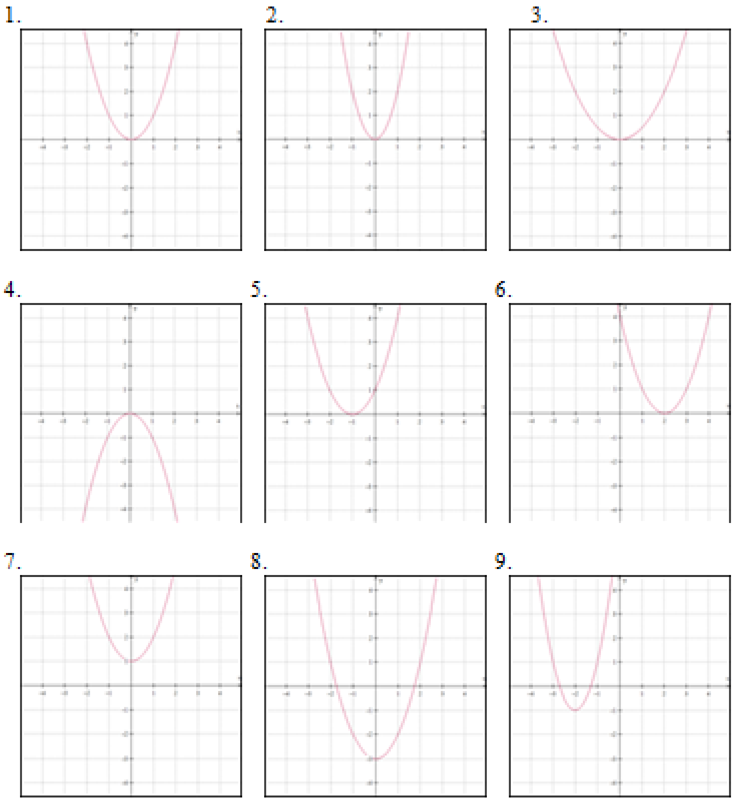
O coeficiente "A" determina a inclinacão da reta e a coeficiente "B" determina onde a reta corta o eixo.

Figura 17 - resposta da questão 1 da atividade 1 dada por uma das duplas

Foi possível perceber que os alunos já estavam conseguindo fazer as relações dos gráficos, ou pelo menos, sabiam quais as atribuições dos coeficientes angular e linear.

A atividade dois da etapa 1 foi semelhante a atividade anterior, dividida em dois momentos, o de relacionar os gráficos e o de analisá-los. Foram relacionadas e analisadas funções de segundo grau na sua forma canônica $y = a(x – m)^2 + 2$.

Atividade 2: Sabendo que a equação de segundo grau representada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, também pode ser representada na forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + k$, relacione as parábolas abaixo com suas respectivas representações algébricas.



( ) $f(x) = -x^2$	( ) $f(x) = x^2 + 1$	( ) $f(x) = x^2$
( ) $f(x) = 2(x+2)^2 - 1$	( ) $f(x) = \frac{x^2}{2}$	( ) $f(x) = (x-2)^2$
( ) $f(x) = 2x^2$	( ) $f(x) = x^2 - 3$	( ) $f(x) = (x+1)^2$

Figura 18 - Atividade 2 da etapa 1

A segunda parte da atividade foi também uma discussão em grupo, para depois eles responder a questão do questionário 2.

Questionário 2:

Com o que você pode observar de nossas discussões, o que você pode concluir em relação aos movimentos dos gráficos de funções quadráticas? Sabendo que a forma canônica da função quadrática é $f(x) = a(x - m)^2 + k$, qual a função no gráfico de cada um dos coeficientes "a", "m" e "k"?

Figura 19 - Questionário 2 da etapa 1

Desta vez, foi sugerido a eles que, na construção dos gráficos, começassem pelo gráfico $y = x^2$, para depois editá-los no software da mesma forma que na atividade um. Expliquei para eles que, como na função afim, teremos também uma função quadrática principal para fazermos a comparação com os outros gráficos que será a função $y = x^2$.

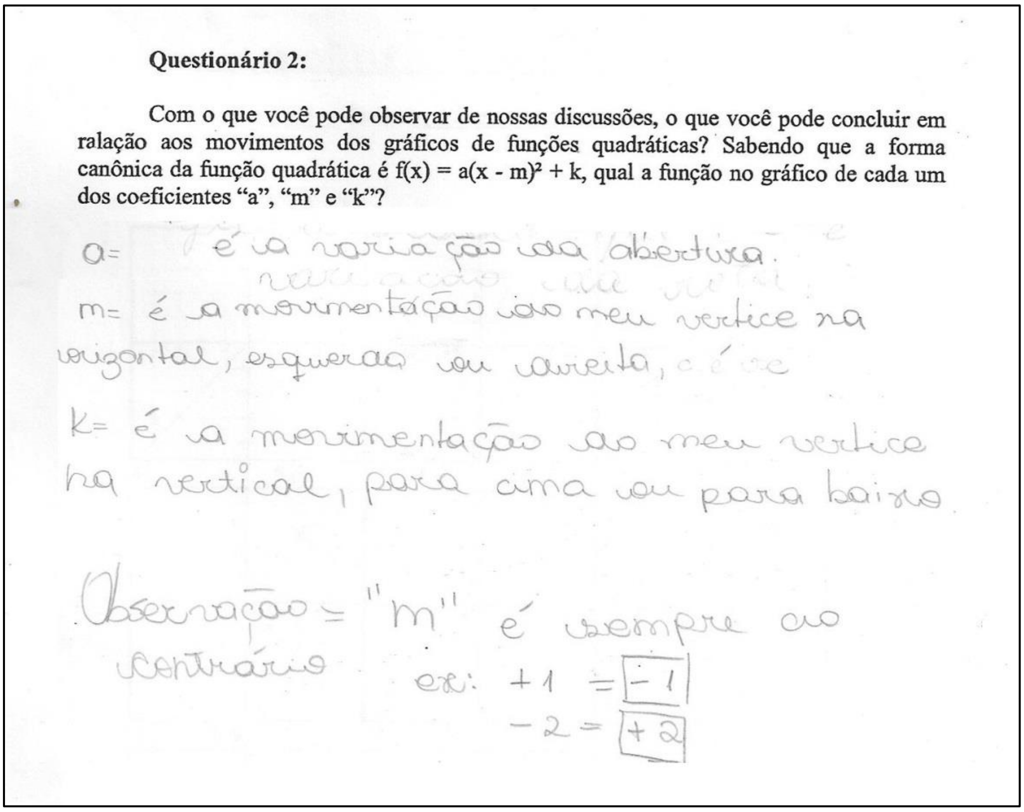
Assim como na atividade anterior, fizemos as comparações do primeiro gráfico com os outros, estabelecendo relações entre os gráficos e as formas algébricas presentes na atividade. A primeira comparação entre o gráfico um e dois e três foram tranquilamente compreendidos pelos alunos. Um dos alunos expressou seu raciocínio da seguinte maneira: “Para “fechar” a parábola temos que multiplicar por um número maior que um, e para “abrir” multiplicamos por um número entre zero e um”.

No quarto gráfico temos a mesma parábola que no gráfico 1, porém, refletida, na qual os alunos não tiveram problemas em relacionar, pois já tiveram que relacionar a concavidade da para cima ou para baixo com relação ao sinal da função quadrática em exercícios vistos em sala de aula. A relação deles foi a de que “se o sinal é mais, a boquinha fica feliz, e se o sinal for menos a boquinha fica triste”. Essa talvez tenha sido uma forma da professora explicar para que os alunos não esqueçam.

Nos gráficos cinco e seis, houve uma discussão do porque a parábola vai para a direita quando o valor do m é positivo e porque vai para esquerda quando o valor do m é negativo. Depois dos alunos pensarem por um tempo, um aluno me perguntou se “não tinha nada a ver” com o sinal da forma canônica. Eu respondi para ele que estava certo, perguntei para eles o que acontecia se tivéssemos o m igual a 2. Eles responderam que na fórmula ficaria menos dois. Eu disse que sim, mas, mesmo que na representação algébrica estivesse -2, o m ainda continuaria sendo 2, por isso o vértice da parábola fica no ponto (2,0). Logo alguns alunos concluíram que “quando o m na representação algébrica for negativo ele (o gráfico) vai para a direita, e quando for positivo ele vai para o outro lado”. Interessante observar que, quando perguntei a eles para qual sentido o m fazia o gráfico se deslocar, alguns alunos responderam que era na vertical e outros na horizontal. Neste caso tive que intervir e orientá-los dizendo que aquele era um movimento horizontal e que vertical naquele caso era os movimentos para cima e para baixo.

Nos gráficos sete e oito, os alunos tiveram facilidade também em fazer a relação do coeficiente k com a coordenada y na qual o vértice se encontra, ou seja, o k é o numero de unidades que o vértice se desloca para cima, quando k positivo, ou para baixo, quando k negativo. Perguntei a eles “o que devemos observar para identificar qual número representa o m e qual número representa o k”. Os alunos pensaram e depois de um tempo alguns alunos perceberam que “o m soma o x e está dentro dos parênteses, o k fica fora”. Um dos alunos que havia falado que o movimento da parábola era vertical em ralação a função do coeficiente m no gráfico comentou: “agora sim é na vertical, “né sor”?”. Concordei com ele e seguimos para o último gráfico. Finalizamos esta etapa com os alunos identificando cada um dos movimentos do gráfico nove, com os seus respectivos coeficientes.

Depois desta discussão, assim como na atividade 1, os alunos responderam a questão do questionário 2. Com as palavras deles, descreveram as funções dos coeficientes da forma canônica que representamos por $y = a(x - m)^2 + k$. Na sequência, algumas das respostas que os alunos escreveram no questionário:


Questionário 2:

Com o que você pode observar de nossas discussões, o que você pode concluir em ralação aos movimentos dos gráficos de funções quadráticas? Sabendo que a forma canônica da função quadrática é $f(x) = a(x - m)^2 + k$, qual a função no gráfico de cada um dos coeficientes “a”, “m” e “k”?

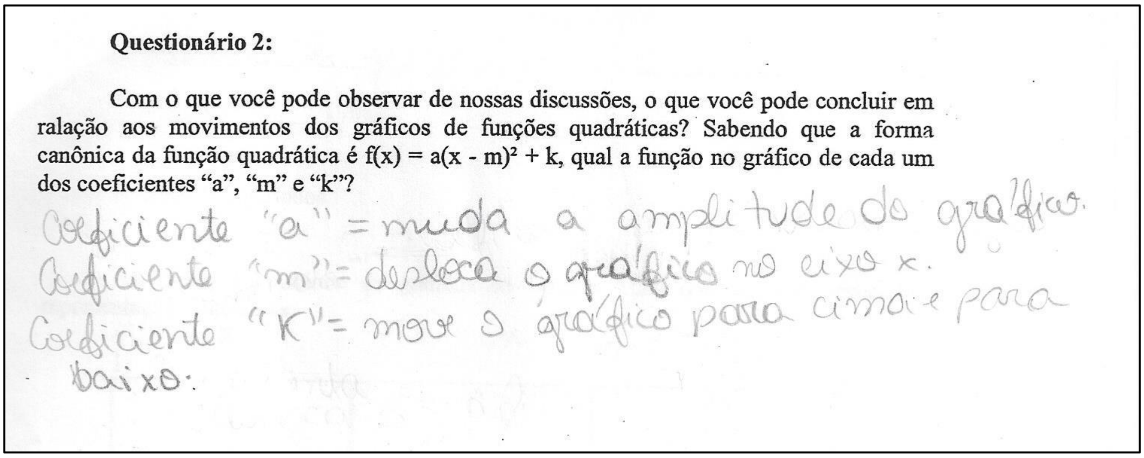
a= é a variação da abertura.

m= é a movimentação do meu vertice na horizontal, esquerda ou direita,

k= é a movimentação do meu vertice na vertical, para cima ou para baixo.

Observação = "m" é sempre ao contrário ex: $+1 = \boxed{-1}$
$-2 = \boxed{+2}$

Figura 20 - resposta da questão 1 da atividade 2 dada por uma das duplas

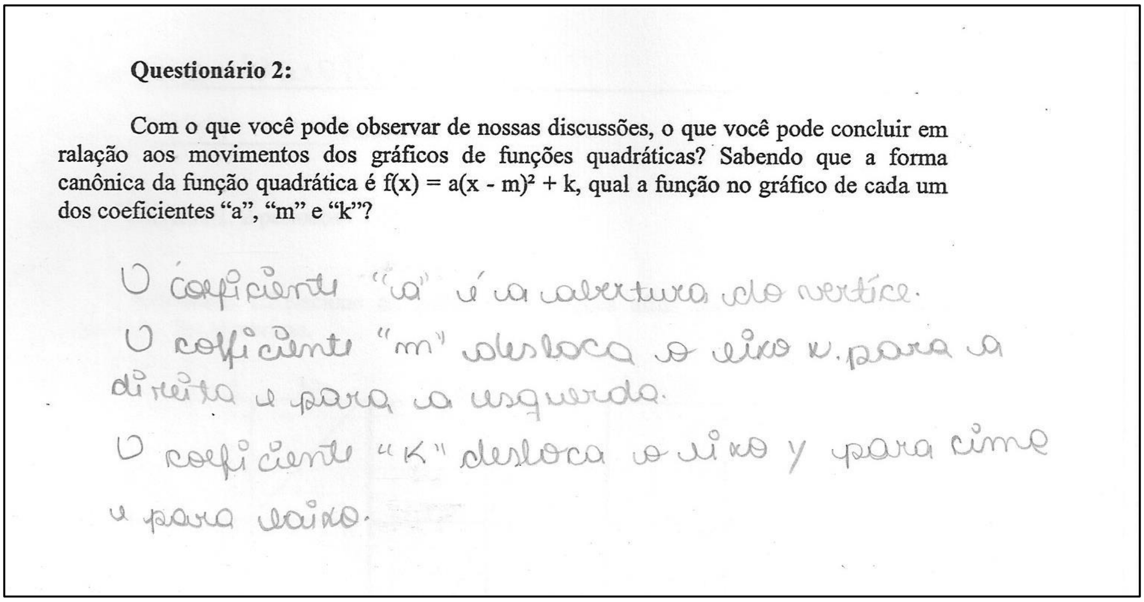


Questionário 2:

Com o que você pode observar de nossas discussões, o que você pode concluir em ralação aos movimentos dos gráficos de funções quadráticas? Sabendo que a forma canônica da função quadrática é $f(x) = a(x - m)^2 + k$, qual a função no gráfico de cada um dos coeficientes "a", "m" e "k"?

Coeficiente "a" = muda a amplitude do gráfico.
Coeficiente "m" = desloca o gráfico no eixo x.
Coeficiente "K" = move o gráfico para cima e para baixo.

Figura 21 - resposta da questão 1 da atividade 2 dada por uma das duplas



Questionário 2:

Com o que você pode observar de nossas discussões, o que você pode concluir em ralação aos movimentos dos gráficos de funções quadráticas? Sabendo que a forma canônica da função quadrática é $f(x) = a(x - m)^2 + k$, qual a função no gráfico de cada um dos coeficientes "a", "m" e "k"?

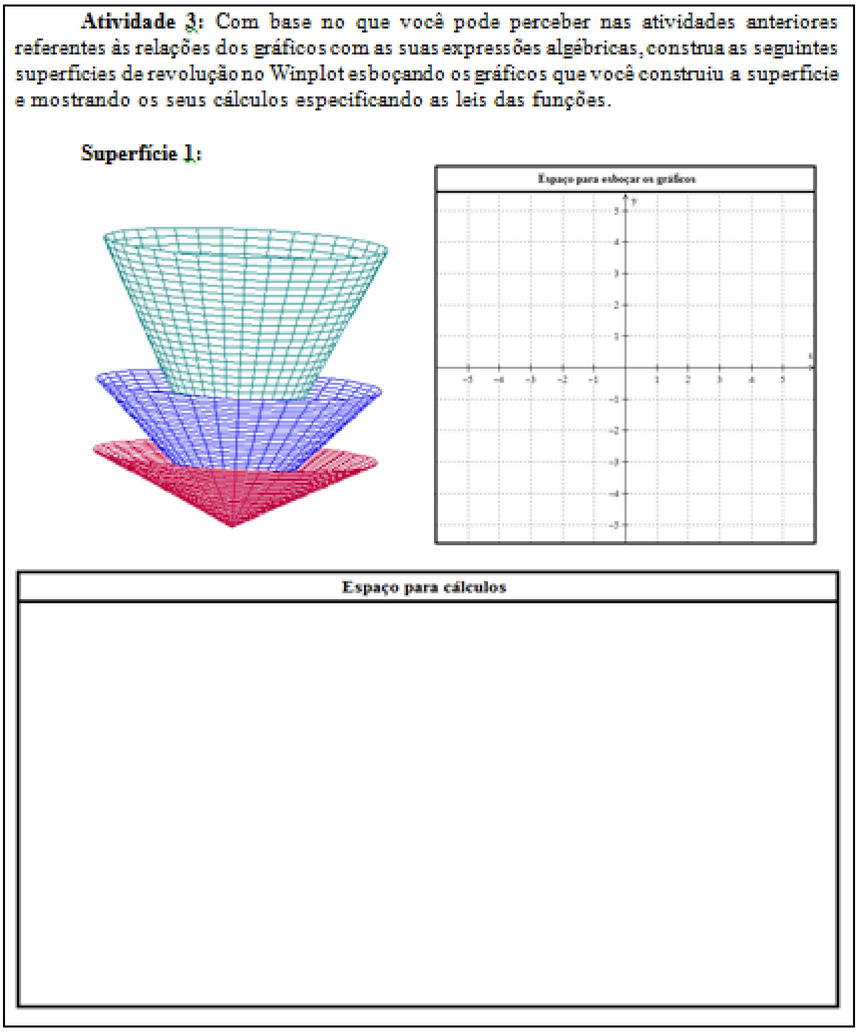
O coeficiente "a" é a abertura do vertice.
O coeficiente "m" desloca o eixo x. para a direita e para a esquerda.
O coeficiente "K" desloca o eixo y para cime e para baixo.

Figura 22 - resposta da questão 1 da atividade 2 dada por uma das duplas

Observamos nas respostas dos alunos, em ambas as atividades, as dificuldades que eles têm de expressar as suas formas de pensar através da escrita. Sabemos que eles tiveram o raciocínio correto, mas a falta de prática ao escrever sobre Matemática dificultaram os registros. Temos como exemplo a figura 20, na qual a aluna diz que o "k desloca o eixo y".

6.2 RELATO ETAPA 2

Na etapa 2 (ver apêndice E), realizamos uma atividade na qual os alunos deveriam identificar as funções dos gráficos que originaram as superfícies de revolução presentes na atividade. Esta atividade apresenta cinco superfícies de revolução, em que cada uma delas necessita que o aluno mude um dos coeficientes para movimentar o gráfico. A seguir, na figura 23, a atividade 3 da nossa sequência didática com a primeira superfície a ser trabalhada pelos alunos.



Atividade 3: Com base no que você pode perceber nas atividades anteriores referentes às relações dos gráficos com as suas expressões algébricas, construa as seguintes superfícies de revolução no Winplot esboçando os gráficos que você construiu a superfície e mostrando os seus cálculos especificando as leis das funções.

Superfície 1:

Espaço para esboçar os gráficos

Espaço para cálculos

Figura 23 - atividade 3 - etapa 2

O objetivo desata primeira superfície era que os alunos percebessem que os gráficos que estavam gerando-a estavam mudando a sua inclinação se comparados um com o outro. Escrevi no quadro as expressões algébricas da função afim e da forma canônica da função quadrática. Inicialmente, os alunos tiveram dificuldades em começar a atividade, e muitos deles perguntavam: “como se faz?”. Porém, observou-se que algumas duplas se sentiram desafiadas e estavam utilizando as mesmas retas que analisamos para se basearem.

Para ajudá-los, resolvi fazer esta primeira superfície com eles. Utilizando a “Data Show” da escola, projetei a atividade no telão da sala de informática, para que todos os alunos pudessem acompanhar. Mostrei para eles que o cone do meio era gerado por uma reta, assim como o exemplo que tínhamos feito na aula de introdução do software Winplot. Assim que eles identificaram essa reta, um dos alunos se pronunciou rapidamente: “então os outros cones também são formados por retas, mas elas são inclinadas”. Respondi que ele estava certo, perguntado prontamente o que era preciso para mudar a inclinação de uma reta. Ele respondeu que era preciso mudar o “a” da função y = ax + b. Depois desta breve explicação, os alunos conseguiram facilmente terminar esta superfície. Eles também não tiveram problema em revolucionar os gráficos, pois muitos acompanharam o polígrafo dado para eles na aula introdutória. Na sequência, nas figuras 24 e 25, os esboços dos gráficos que os alunos fizeram para posteriormente construírem no software e as funções que os eles utilizaram para construir os gráficos.

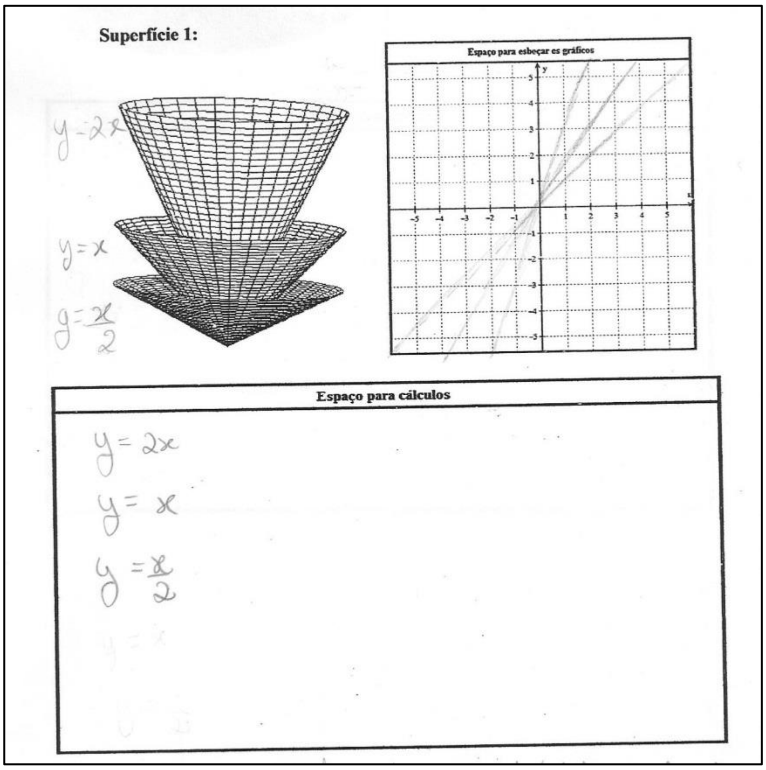


Figura 24 – resposta dos alunos

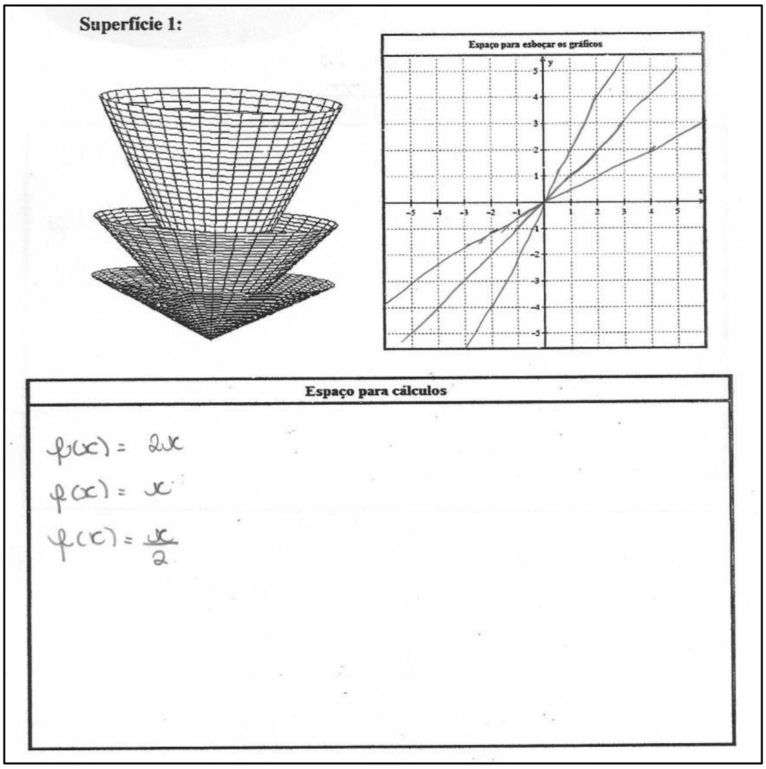


Figura 25 – resposta dos alunos

Analisando as respostas dos alunos, percebemos que eles utilizaram as mesmas funções para a construção dessas superfícies, porém acreditamos que eles utilizaram estas funções com base na atividade 1 da etapa 1,na qual analisamos os três gráficos em relação às suas mudanças de inclinação. Constatamos também que nenhum dos alunos realizou cálculos, apenas especificaram as funções utilizadas.

Na segunda superfície (figura 26), os alunos deveriam também encontrar as retas que geram a superfície de revolução, porém, desta vez, os gráficos eram transladados, mudando o coeficiente linear.

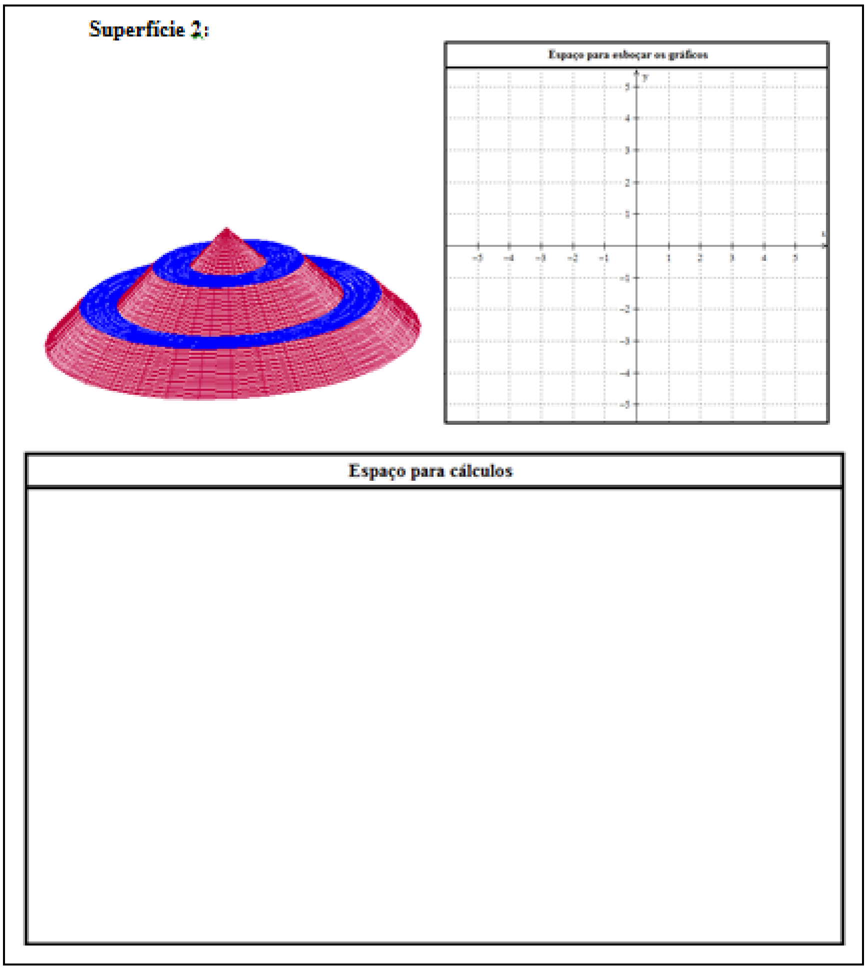


Figura 26 - superfície 2 - atividade 3

Com a primeira superfície concluída, os alunos já se sentiram mais seguros para a construção da próxima superfície. Porém alguns alunos, inicialmente, ficaram assustados com a complexidade de superfície, mas nada que tenha prejudicado o andamento da atividade. Percebi que nesta atividade eles não tiveram dificuldades para encontrar as funções necessárias para revolucioná-las. Porém, a maioria dos alunos se atrapalhou na questão de limitar o domínio para revolucionar o gráfico. Conversando com os alunos, entendi que, a exemplo da atividade anterior, eles não precisaram mudar o domínio, já que no software o domínio já aparece limitado no intervalo de 0 a 1. Logo, observou-se que os alunos construíram a superfície dessa forma (figura 27):

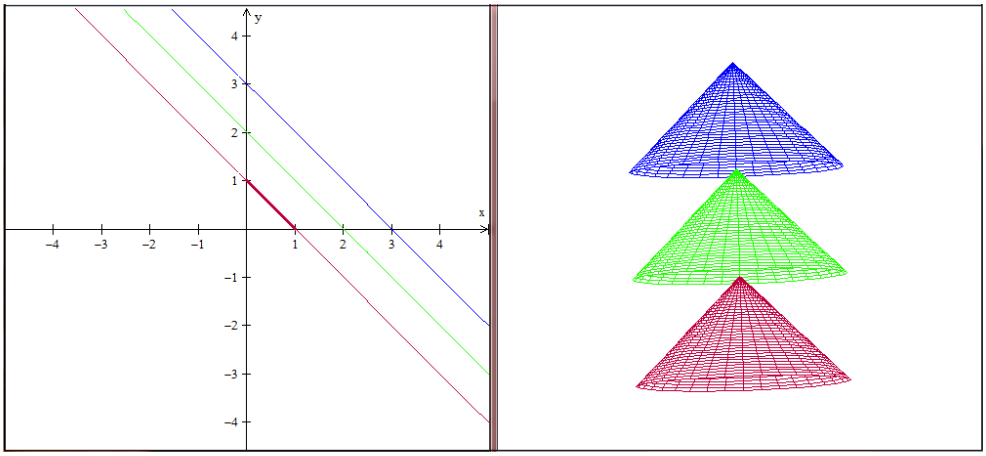


Figura 27 - Superfície criada por algumas duplas quando não limitado o domínio

Os alunos, percebendo que o domínio precisava ser limitado, conseguiram construir a superfície da maneira correta. Porém, algumas duplas, antes de fazerem a construção certa, fizeram outra tentativa que é interessante observar. Quando eles limitaram a função y = -x + 1 no intervalo de 0 a 1, eles limitaram a função y = -x + 2 no intervalo de 1 a 2 e a função y = -x + 3 no intervalo de 2 a 3, construindo a seguinte superfície (figura 28):

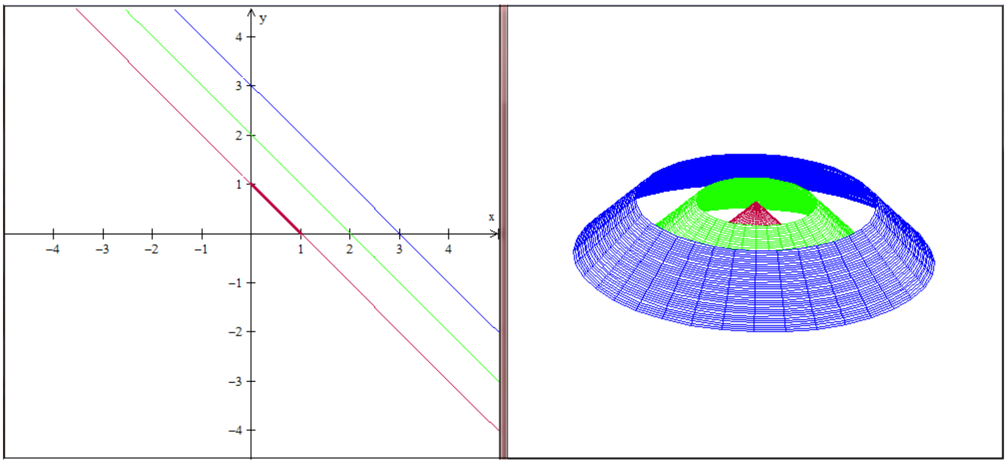


Figura 28 - superfície criada por algumas duplas na tentativa de limitar o domínio corretamente

Apesar de essas duplas terem limitado o domínio de forma incorreta, elas logo acharam o erro. Visualizando os gráficos, as duplas perceberam que o segmento do gráfico da função y = -x +2 teria que estar abaixo do segmento do gráfico da função y = -x + 1, e não do lado, sendo assim, deveriam limitar a função y = -x + 2 no intervalo de 2 a 3, com o raciocínio análogo para o gráfico da função y = -x + 3. Percebemos neste exemplo o potencial do software para a construção da aprendizagem. Segundo Valente (1993a) “o uso do computador requer certas ações que são bastante efetivas no processo de construção do conhecimento. Quando o aprendiz está interagindo com o computador ele está manipulando conceitos e isso contribui para o desenvolvimento mental”. Neste caso, se tratando da limitação do domínio das funções, o aluno pode perceber os seus erros e consertá-los, tendo a interação necessária com o software para a construção do seu conhecimento. Na sequência, as funções e os esboços que os alunos fizeram para a construção da superfície (figura 29, 30 e 31):

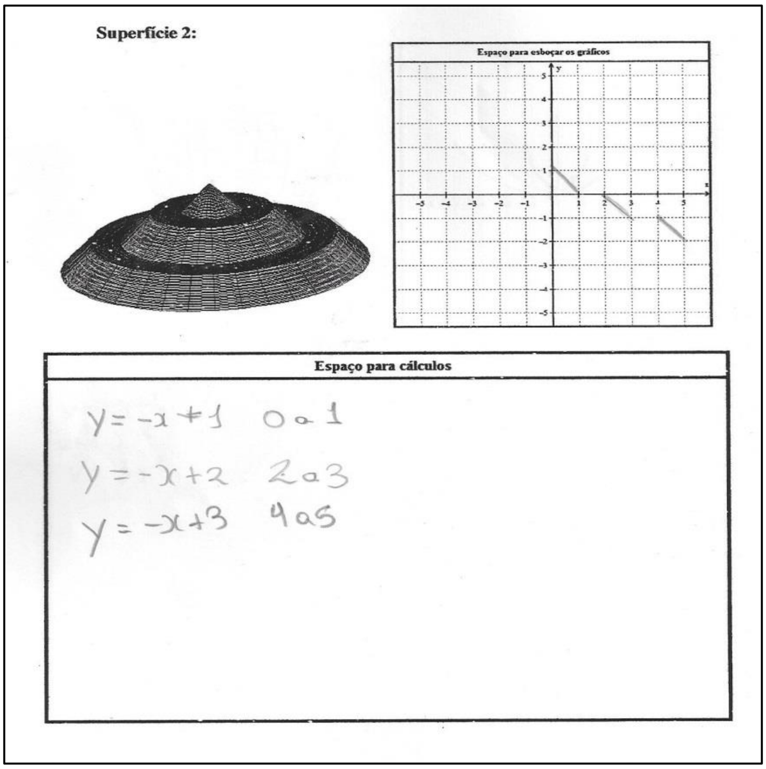


Figura 29 - resposta dos alunos

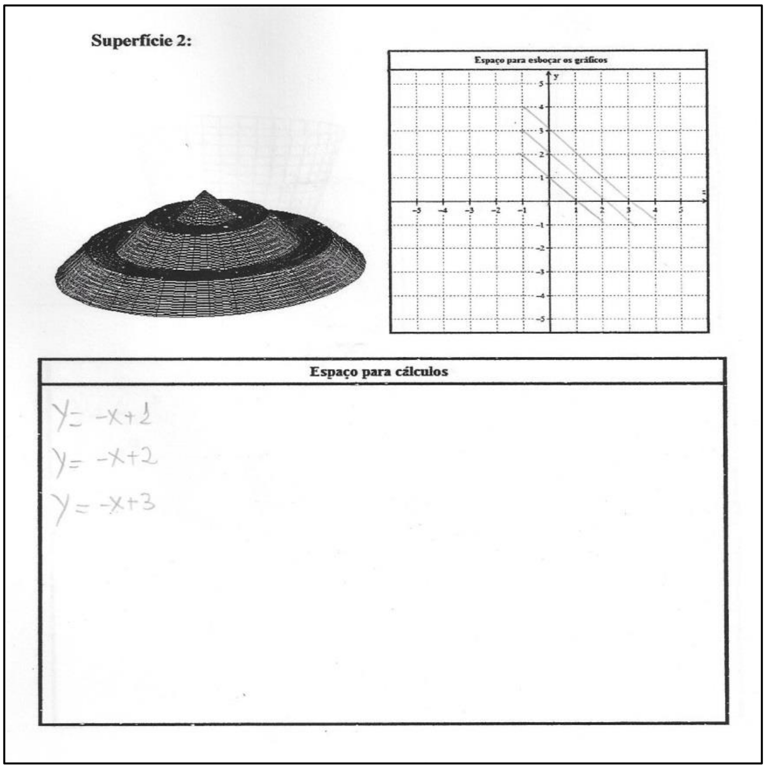


Figura 30 - resposta dos alunos

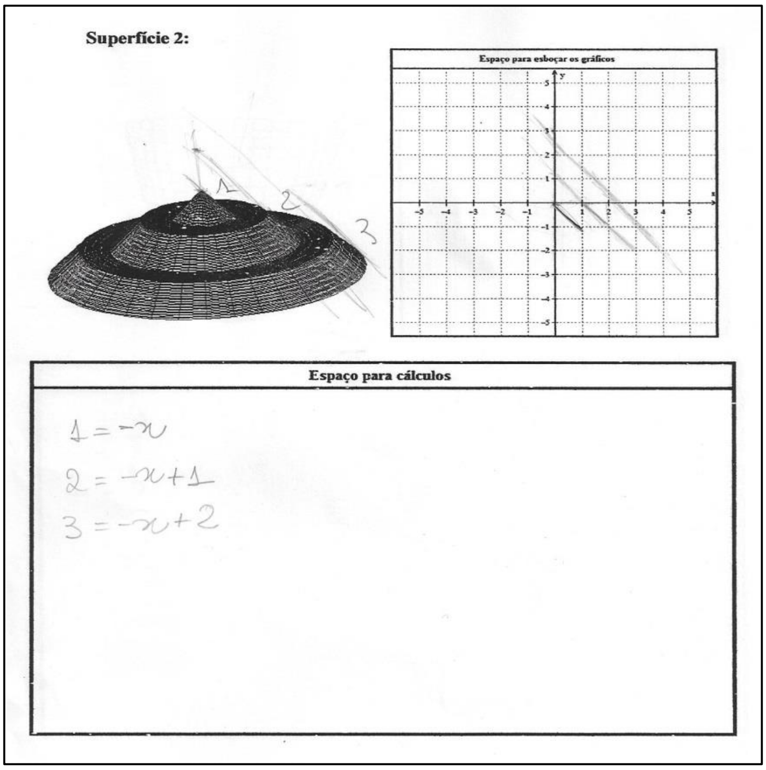


Figura 31 - resposta dos alunos

A partir da terceira superfície era necessário que os alunos lembrassem a função dos coeficientes da forma canônica da função quadrática no gráfico. A seguir (figura 32), apresenta-se a superfície 3 da atividade 3:

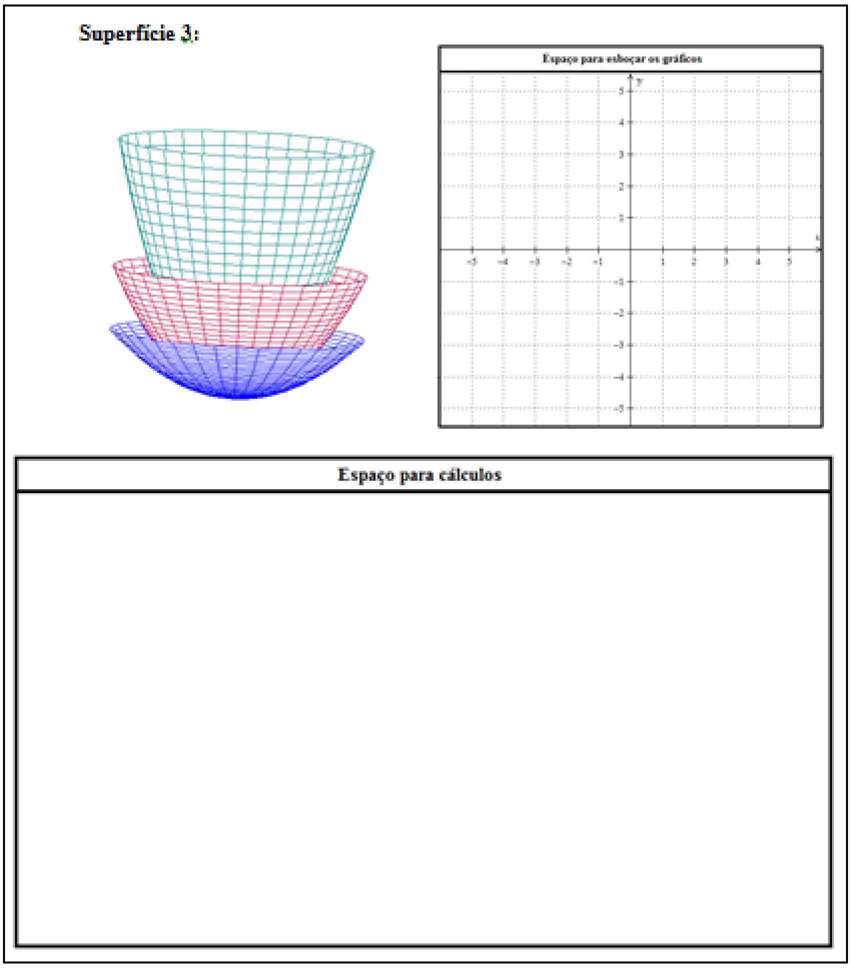


Figura 32 - superfície 3 - atividade 3

Nesta terceira superfície os alunos tiveram o mesmo raciocínio da superfície 1. Eles conseguiram perceber que as funções utilizadas para esta construção eram as mesmas utilizadas na atividade 2 da etapa 1 e as usaram para construir as superfícies de revolução . Mesmo que tenham sido as mesmas funções, acreditamos ser válida esta relação, pois os alunos conseguiram visualizar que as parábolas estão mudando a sua concavidade. Muitas duplas usaram as mesmas funções, porém tivemos duas duplas que utilizaram funções diferentes que elas julgaram construir uma superfície parecida com a superfície proposta. No lugar da função $y = \frac{x^2}{2}$, as duplas construíram o gráfico da função $y = 3x^2$. Consideramos que as duplas criaram uma solução para construir uma terceira superfície para completar a superfície proposta. Na sequência (figuras 33 e 34) têm-se exemplos das construções das duplas:

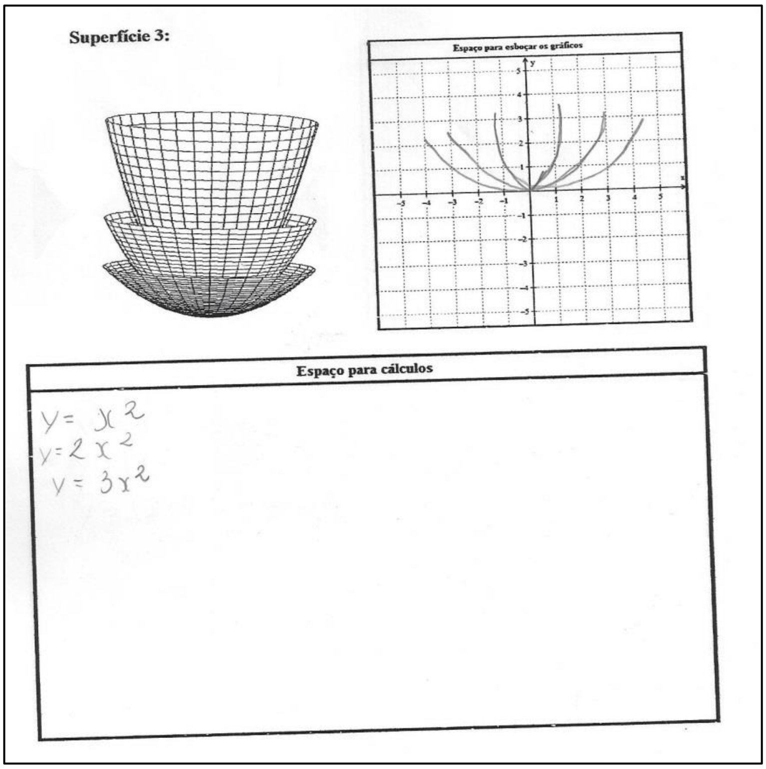


Figura 33 – resposta dos alunos

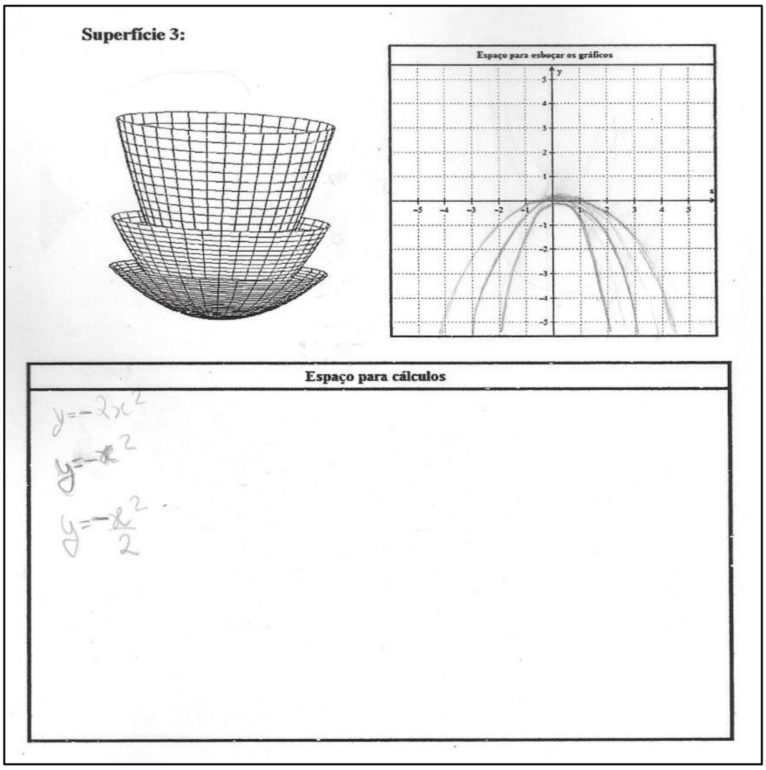


Figura 34 – resposta dos alunos

Observa-se que na figura 34 as parábolas estão com concavidade voltada para cima. O aluno pode construir a superfície desta forma pois é possível movimentar as superfícies construídas no software com as setas direcionais do teclado, possibilitando o aluno virar a superfície, deixando-a na posição desejável.

Partindo para a quarta superfície (figura 35) os alunos deveriam construir parábolas transladando-as no eixo x.

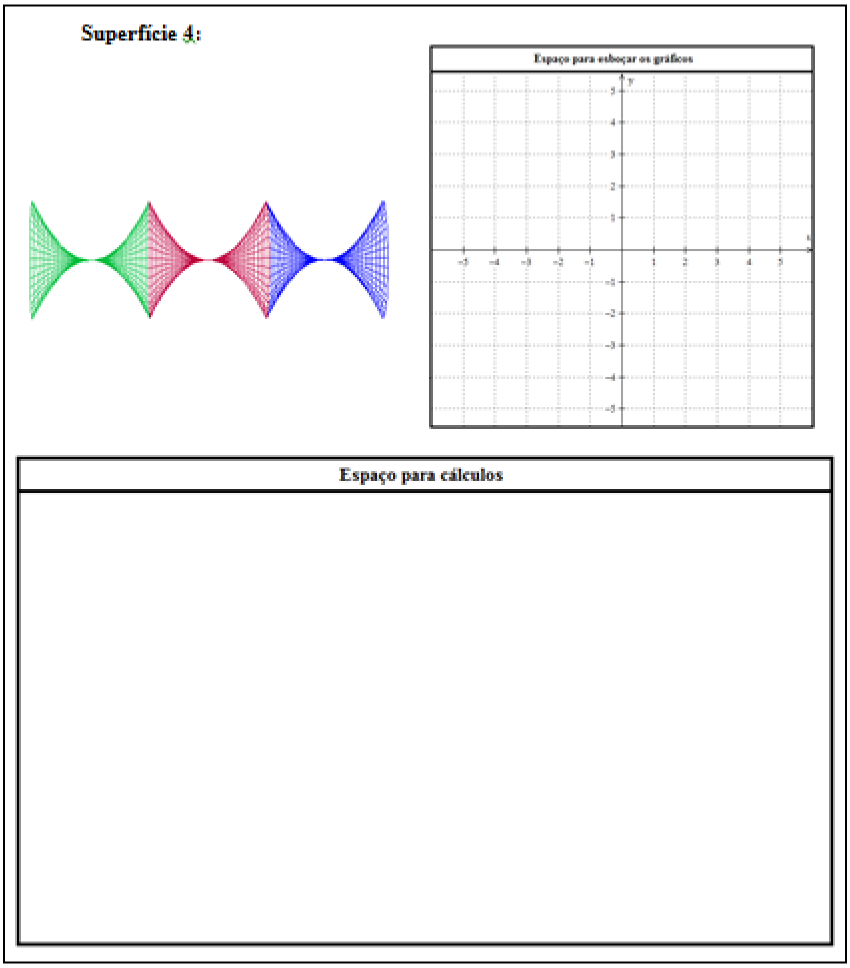


Figura 35 - Superfície 4 - atividade 3

Para a construção da superfície, dois fatores fizeram com que os alunos ficassem confusos nesta atividade. A primeira foi o fato de eles estarem sempre revolucionando os gráficos em torno do eixo y. Inicialmente eles não se deram conta do que estava errado, então foi necessário lembrá-los que havia outro eixo no qual os gráficos poderiam ser revolucionados. Outro fator que os confundiu foi a posição na qual eles queriam colocar a parábola. Eles visualizaram facilmente que era necessário transladá-la na horizontal. Porém não levaram em consideração o sinal de menos que acompanha o coeficiente m na forma canônica $y = a(x - m)^2 + k$, que muda a posição da parábola.

Por exemplo, uma aluna queria construir uma parábola com seu vértice no ponto (2,0), logo, ela escreveu a lei da função $y = (x + 2)^2$, porém a parábola foi construída com o vértice no ponto (-2,0). A construção da superfície ficou igual a da superfície pedida, porém ela não tinha entendido porque a parábola tinha "ido para o lugar errado". Assim eu expliquei para ela que, como tínhamos visto na etapa 1, o menos da forma canônica muda o sinal do coeficiente "m", ou seja, se quisesse colocar a parábola no ponto (2,0) ela deveria escrever a lei da função sendo $y = (x - 2)^2$ e que, do jeito que ela tinha feito, era como se ela tivesse escolhido m = -2, pois $y = (x + 2)^2$ seria como escrever $y = (x - (-2))^2$, ou seja, m tem valor -2, o que leva a parábola a ser construída com o seu vértice no ponto (-2,0). Nesta atividade, alguns alunos apenas fizeram duas parábolas para fazer a rotação em torno do eixo x, pois argumentavam que "era só construir a parábola do outro lado". Segue (figura 36 e 37) algumas das respostas dos alunos:

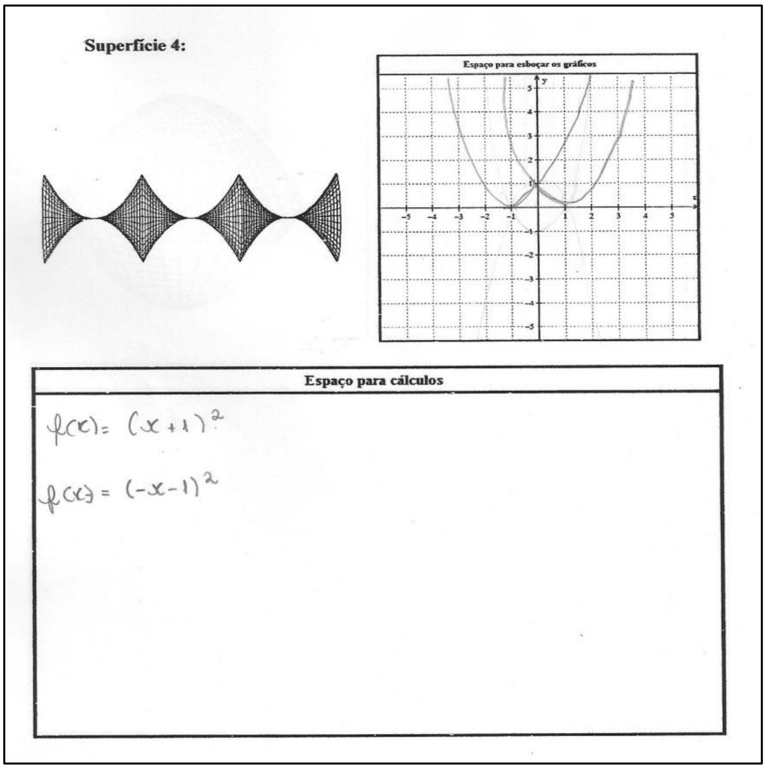


Figura 36 – resposta dos alunos

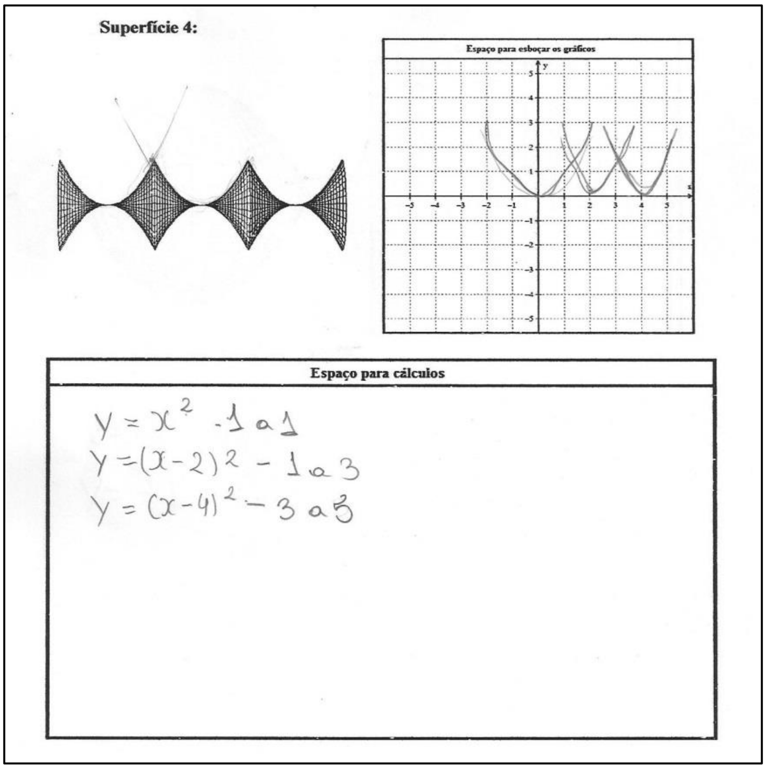


Figura 37 – resposta dos alunos

É interessante observar que na figura 36, o aluno não utilizou o gráfico da função $f(x) = x^2$ como as outras duplas, mas sim, constrói uma parábola transladada uma unidade para direita e uma parábola transladada uma unidade para esquerda, a partir da função $y = x^2$. E embora a representação algébrica das duas funções seja diferente, elas se equivalem, tornando as representações gráficas semelhantes.

Observa-se que escrever não é o ponto forte deste grupo de alunos. Poucos explicitam, por exemplo, o domínio da função. Na figura 37, uma das duplas não seguiu este padrão e colocou o intervalo que foi utilizado para delimitar os gráficos.

Na quinta e última superfície (figura 38), era necessário que os alunos transladassem as parábolas no eixo y e que uma delas fosse refletida.

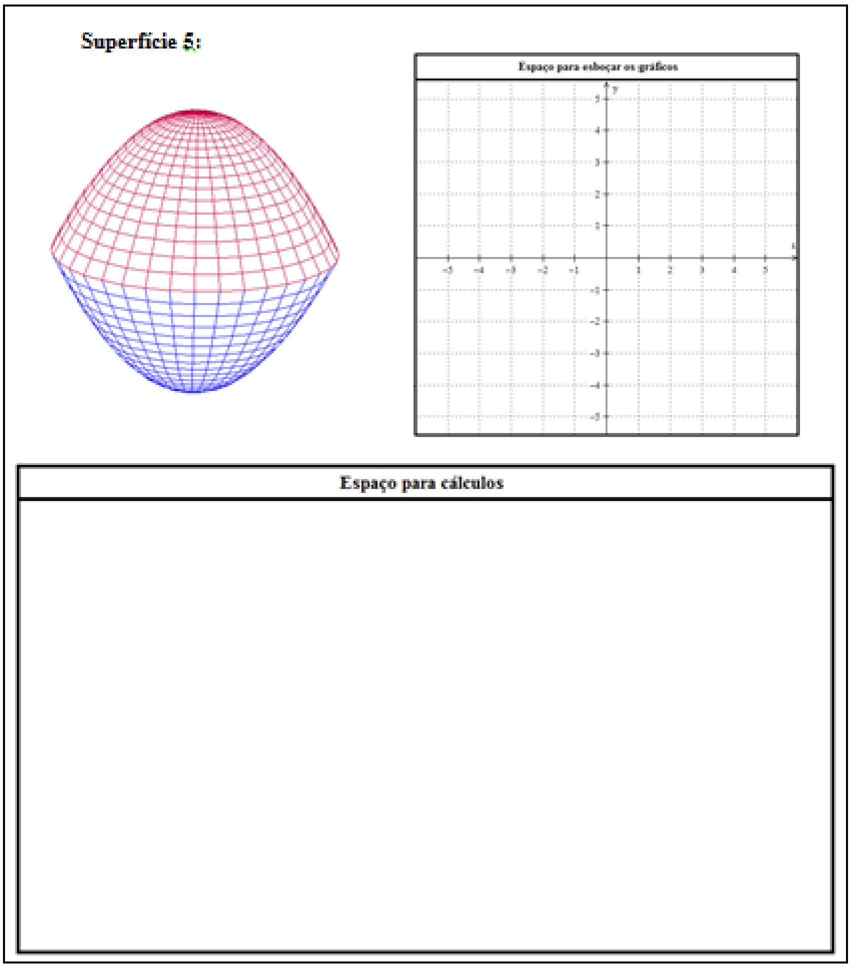


Figura 38 - Superfície 5 - atividade 3

Nesta última superfície, os alunos logo perceberam que era necessário utilizar duas parábolas. Porém, algumas duplas não conseguiam fazê-las com que ficassem nas posições necessárias para construir a superfície, transladando-as para cima ou para baixo. Algumas duplas tentaram revolucionar essas parábolas, formando a imagem a seguir (figura 39):

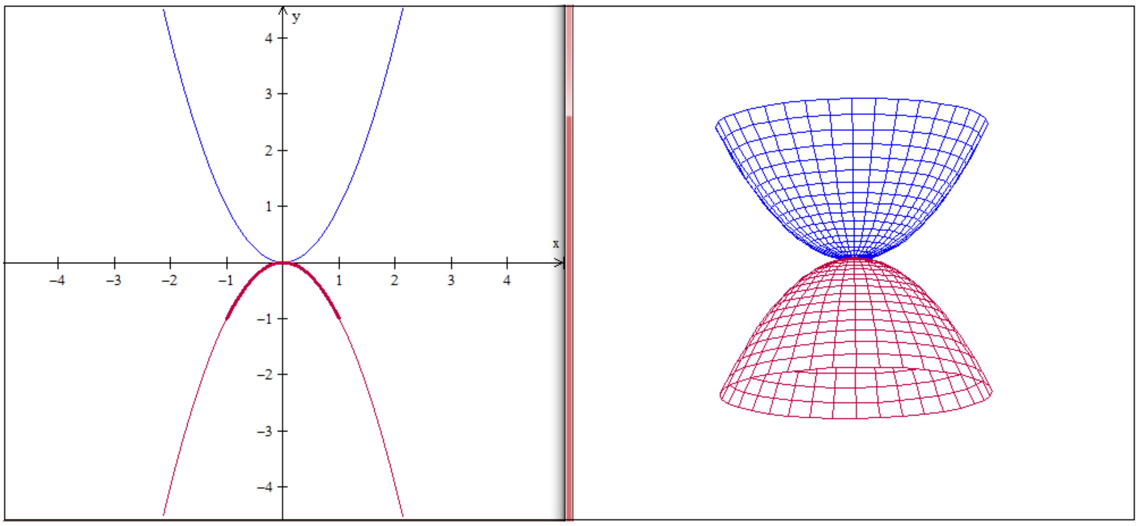


Figura 39 - Superfície que os alunos criaram antes de perceberem as translações verticais das parábolas

Neste caso, foi necessária a intervenção nestes grupos, pedindo a eles que comparassem a imagem que eles criaram com a que estava sendo pedida na atividade. Eles me responderam que era necessário que “a superfície azul tinha que ficar embaixo da vermelha”, e para isso era necessário mudar a posição de umas das parábolas. Na sequência um exemplo de como a aluna concluiu a atividade (figuras 40):

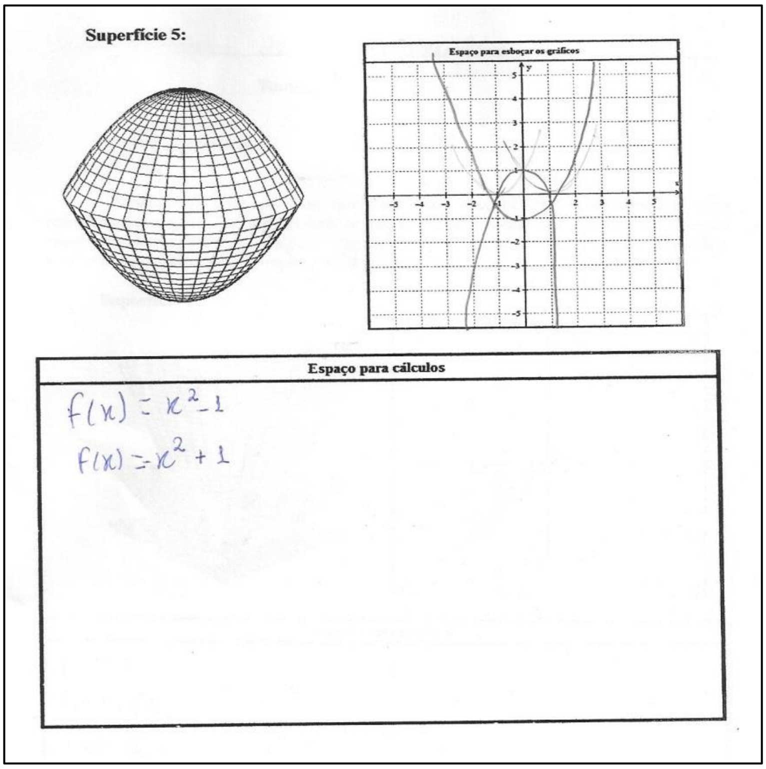


Figura 40 – resposta dos alunos

Terminada as construções das superfícies, os alunos puderam trabalhar separadamente cada um dos coeficientes que movimentam os gráficos das funções afim e quadrática. A partir deste momento, acreditamos que os alunos já estavam aptos para a próxima etapa da nossa sequência didática.

6.3 RELATO ETAPA 3

Nesta terceira etapa (ver apêndice F), elaboramos uma atividade na qual os alunos deveriam utilizar os conhecimentos adquiridos nas etapas passadas para a conclusão do trabalho. Cada dupla deveria escolher uma das imagens disponíveis na atividade ou pesquisar uma imagem que a dupla gostaria de tentar reproduzir utilizando superfícies de revolução.

Etapa 3: 2 períodos

Atividade 4: Agora é a sua vez, escolha uma imagem para você construir no Winplot uma réplica por meio de retas e parábolas, utilizando as superfícies de revolução.

Você pode escolher umas das imagens abaixo, ou se preferir, pesquise uma imagem de sua preferência que possa construir com superfícies de revolução.

Figura 1: Cogumelo	Figura 2: Guarda-chuva	Figura 3 Abajur

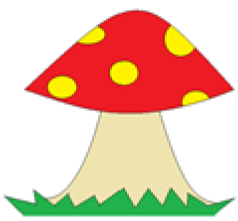



Figura 4: Forma de bolo	Figura 5: Mesa	Figura 6: Taça
		

Figura 41 - Atividade 4 - Etapa 3

Salientamos que nenhuma das duplas pesquisou imagens, todas elas foram escolhidas da atividade.

Posteriormente a construção no software, os alunos deveriam responder a um questionário com duas perguntas referentes a esta etapa.

Questionário 3

1 – Qual imagem você escolheu e por quê? Inicialmente, você já tinha ideia de quais funções utilizar?

2- Escreva detalhadamente como você organizou as ideias para a construção no software, expondo suas dificuldades caso as tenha tido, especificando todas as funções que utilizou.

Figura 42 - Questionário 3 - Etapa 3

Esta atividade foi planejada para que os alunos tivessem mais liberdade e pudessem mostrar sua criatividade em conjunto com o que aprenderam até agora em nossos encontros, além de exigir que o aluno tenha total conhecimento dos coeficientes da função afim e da forma canônica da função quadrática, que serão cruciais para as construções dos alunos. Com estes conhecimentos, o aluno pode construir um gráfico de uma reta ou uma parábola no local do plano que ele quiser, e na inclinação da reta ou concavidade da parábola da forma que ele desejar.

Notamos que esta atividade foi a que os alunos mais gostaram, porém, inicialmente, algumas duplas tiveram dificuldades em pensar nos gráficos para a construção da imagem, enquanto outras decidiram escolher uma imagem que já sabiam exatamente quais funções utilizar. Em relação às duplas que tiveram dificuldades, foi necessário pensar junto com elas. Fazíamos relações das imagens com retas e parábolas, e os questionava, perguntando onde os gráficos poderiam ser construídos e de que forma.

É interessante observar que, nas construções que havia interseções, os alunos utilizaram a ferramenta “mostrar arco” para encontrá-las, o que resultou na ausência de cálculos. Por exemplo, uma dupla construiu um guarda-chuva a partir de uma reta e uma parábola, como mostra a figura 43.

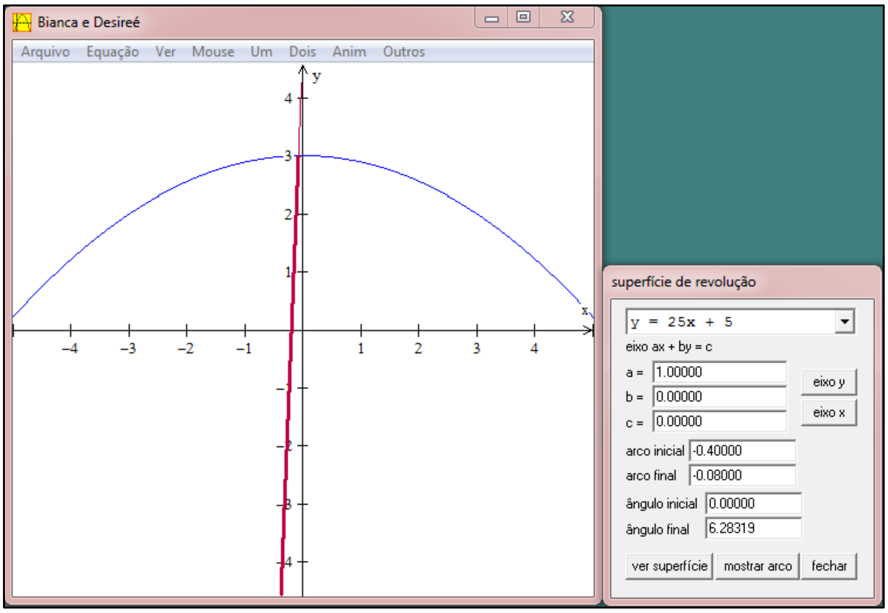


Figura 43 - Gráficos para a construção de um guarda chuva

Para encontrar o ponto que a reta toca a parábola, a dupla foi atribuindo valores para o "arco final" e posteriormente clicando em "mostrar arco" para verificar se estava ficando próximo ou não da parábola, prosseguindo este processo até estar satisfatório para a dupla. Desta forma, não utilizou o processo de intersecção de curvas através da resolução de sistemas.

A atividade foi muito proveitosa, e notamos que os alunos foram muito bem, sendo que algumas duplas construíram as suas superfícies sem precisar de auxílio. Na sequência, alguns exemplos de construções feitas pelos alunos utilizando superfícies de revolução e o questionário que eles responderam. É interessante observar que algumas das duplas escolheram a imagem que julgaram mais fácil de fazer a construção, outras já sabiam quais funções utilizar. Na sequência, alguns trabalhos dos alunos:

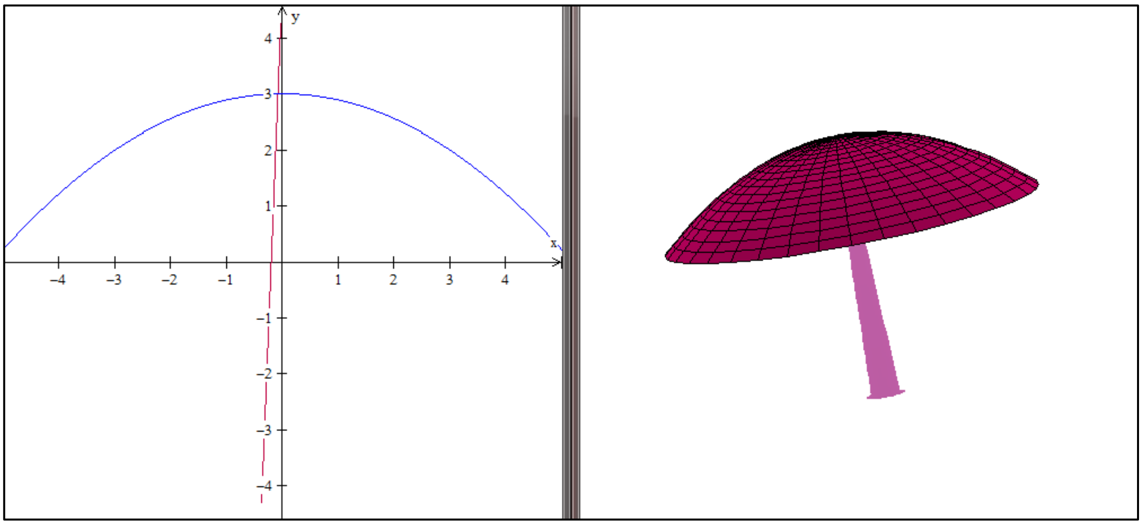
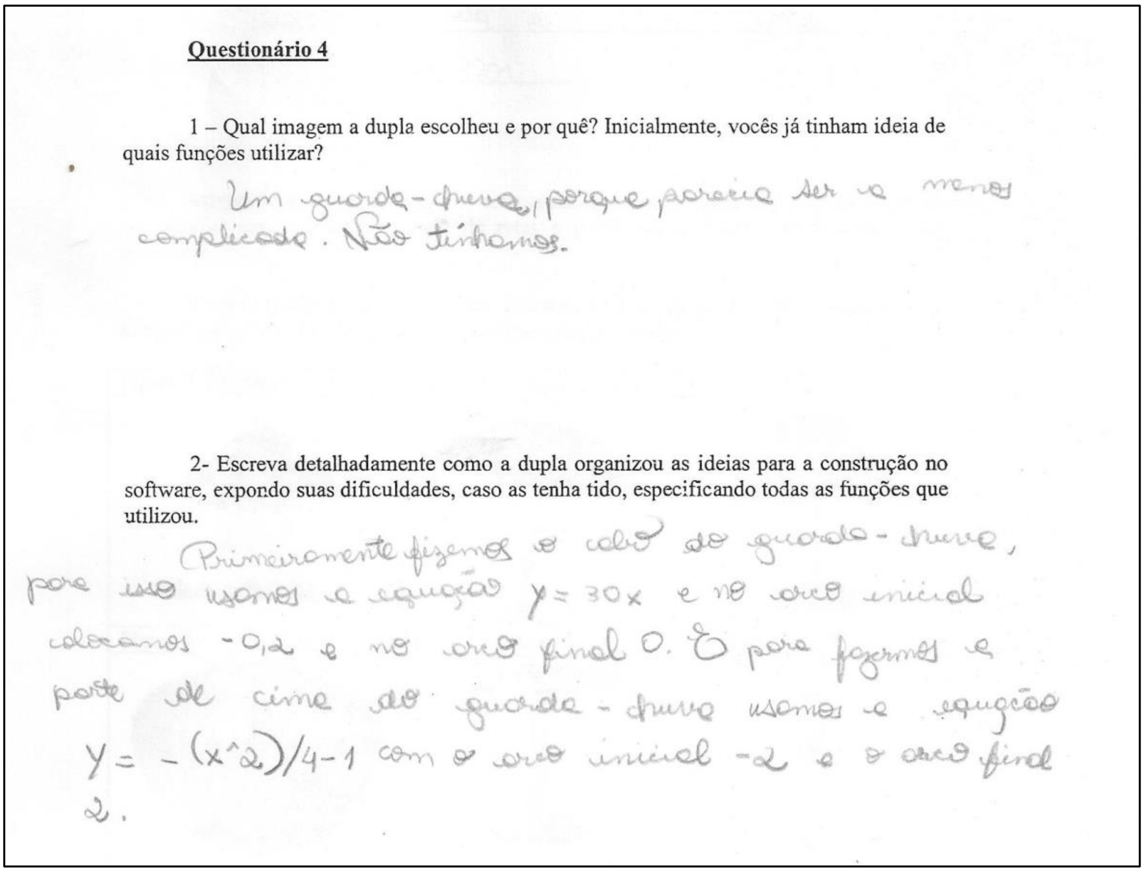


Figura 44 - Construção de um guarda chuva feita por uma das duplas



Questionário 4

1 – Qual imagem a dupla escolheu e por quê? Inicialmente, vocês já tinham ideia de quais funções utilizar?

Um guarda-chuva, porque parecia ser o menos complicado. Não tínhamos.

2- Escreva detalhadamente como a dupla organizou as ideias para a construção no software, expondo suas dificuldades, caso as tenha tido, especificando todas as funções que utilizou.

Primeiramente fizemos o cabo do guarda-chuva, para isso usamos a equação y= 30x e no arco inicial colocamos -0,2 e no arco final 0. E para fazermos a parte de cima do guarda-chuva usamos a equação y= -(x^2)/4-1 com o arco inicial -2 e o arco final 2.

Figura 45 - questionário da dupla

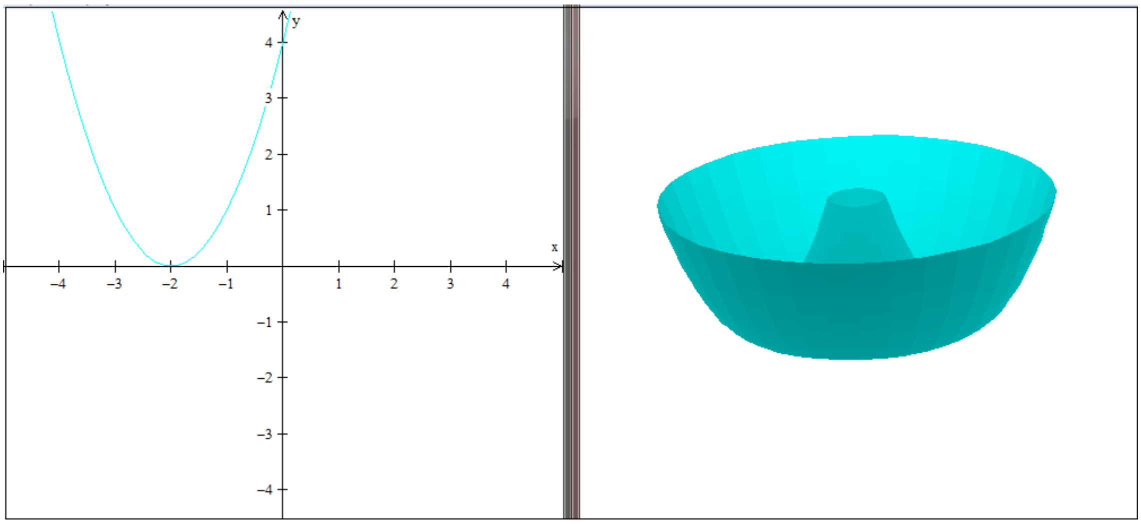


Figura 46 - Construção de uma forma de bolo feita por uma das duplas

<u>Questionário 4</u>

1 – Qual imagem a dupla escolheu e por quê? Inicialmente, vocês já tinham ideia de quais funções utilizar?

FIZ A FORMA DE BOLO POIS ACHEI QUE ERA A MAIS FÁCIL EU NÃO TINHA IDÉIA DE QUAL FUNÇÃO USAR ENTÃO FUI PROCURANDO UMA.

2- Escreva detalhadamente como a dupla organizou as ideias para a construção no software, expondo suas dificuldades, caso as tenha tido, especificando todas as funções que utilizou.

UTILIZEI SOMENTE UMA FUNÇÃO NO COMEÇO ACHEI DIFÍCIL POIS NÃO SABIA POR ONDE COMEÇAR, MAS DEPOIS FICOU MAIS FÁCIL.

Figura 47 - questionário da dupla

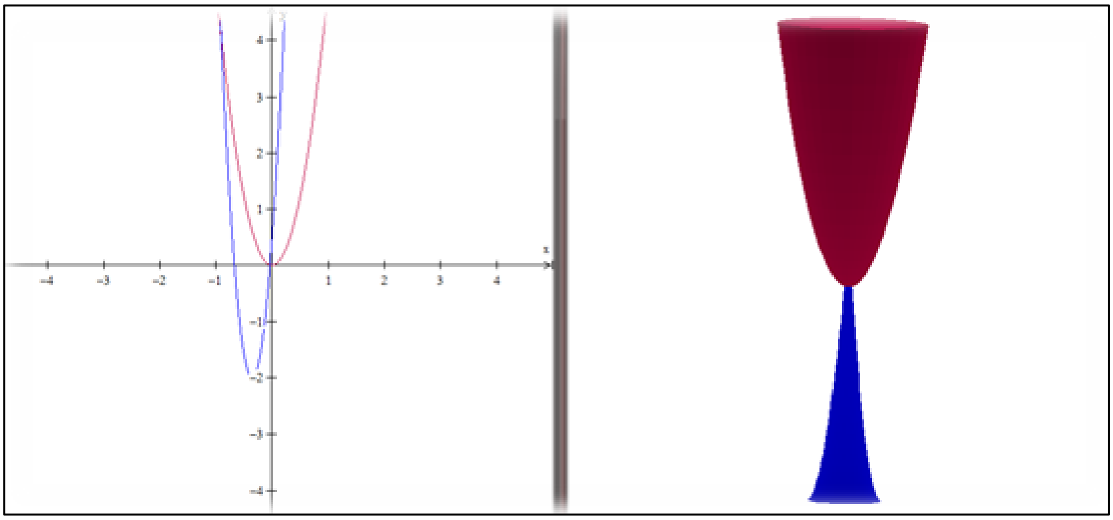
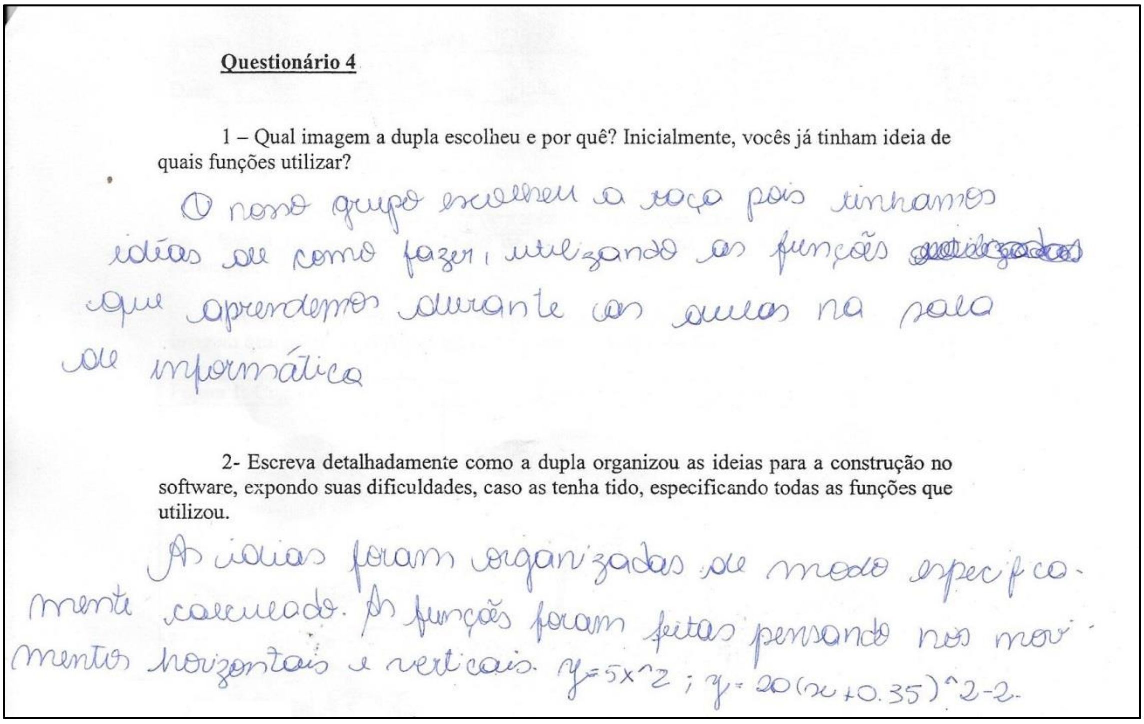


Figura 48 - Construção de uma taça feita por uma das duplas



Questionário 4

1 – Qual imagem a dupla escolheu e por quê? Inicialmente, vocês já tinham ideia de quais funções utilizar?

O nosso grupo escolheu a taça pois tinhamos idéias de como fazer, utilizando as funções ~~[illegible]~~ que aprendemos durante as aulas na sala de informática

2- Escreva detalhadamente como a dupla organizou as ideias para a construção no software, expondo suas dificuldades, caso as tenha tido, especificando todas as funções que utilizou.

As ideias foram organizadas de modo especificamente calculado. As funções foram feitas pensando nos movimentos horizontais e verticais. y=5x^2 ; y= 20(x+0.35)^2-2.

Figura 49 – questionário da dupla

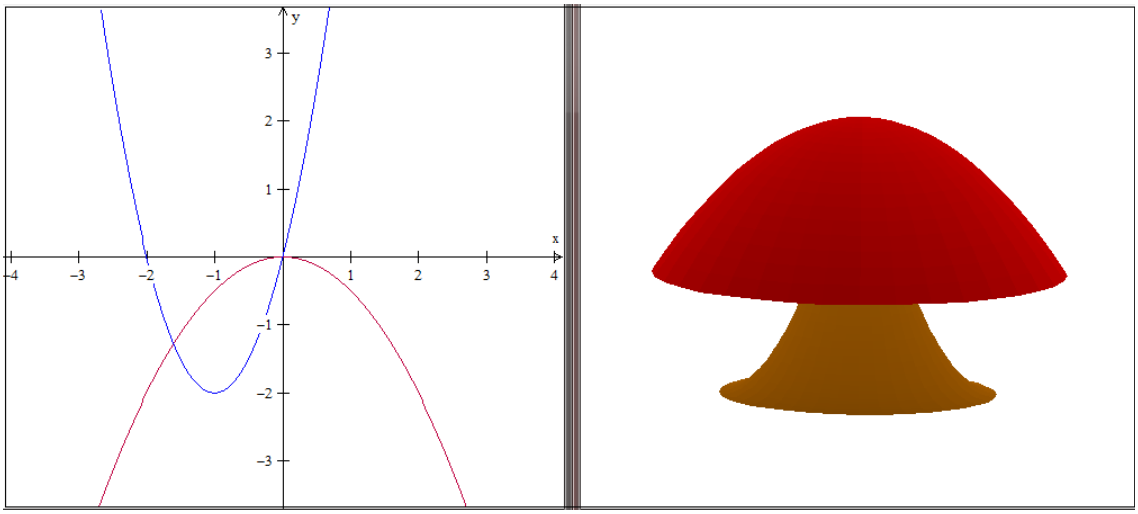


Figura 50 - Construção de um cogumelo feita por uma das duplas

Questionário 4

1 – Qual imagem a dupla escolheu e por quê? Inicialmente, vocês já tinham ideia de quais funções utilizar?

1- cogumelo, por ser mais fácil de visualizar. Sim- tinhamos.

2- Escreva detalhadamente como a dupla organizou as ideias para a construção no software, expondo suas dificuldades, caso as tenha tido, especificando todas as funções que utilizou.

Utilizamos a função f(x) =(-x^2)/2, e ao analizarmos o gráfico com a superfície de revolução vimos que a figura se parecia com a imagem 1 do cogumelo. Também utilizamos a equação 2(x+1)^2-2.

Figura 51 – questionário da dupla

Temos também uma construção de uma dupla que consideramos interessante, mas infelizmente eles não responderam ao questionário.

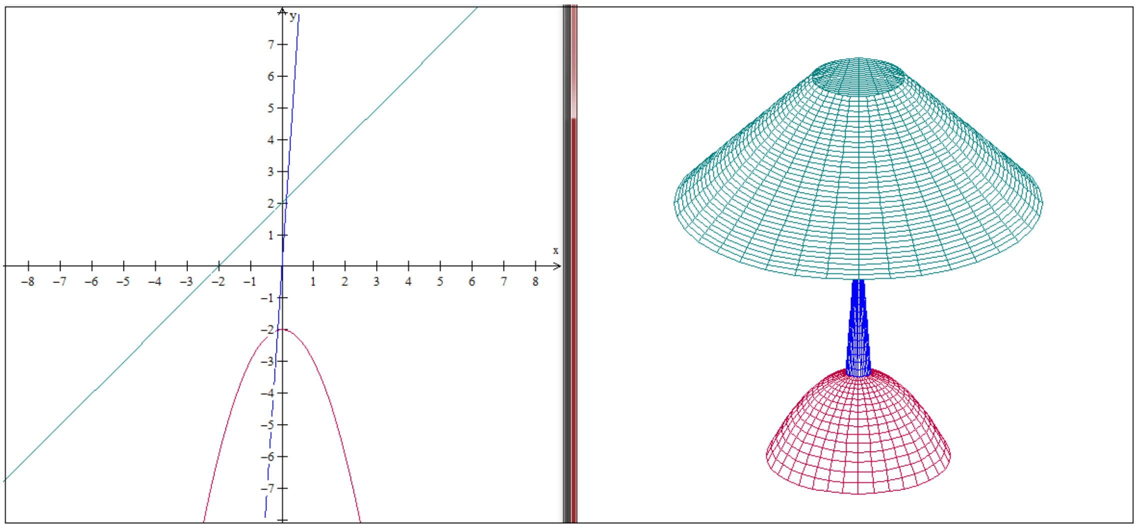


Figura 52 - Construção de um abajur feita por uma das duplas

Percebemos que parte das construções dos alunos foi apenas com parábolas, não combinando as funções afins e quadráticas na mesma construção. Acreditamos que, para solucionar esta situação, pensamos em três formas: poderíamos incentivar a escolha de mais do que uma imagem, criando a possibilidade de ele escolher uma imagem em que a construção de funções afins também estaria presente; pré-estabelecer duas ou três imagens, nas quais todas deveriam ser construídas, também possibilitando a construção de funções afins e parábolas; ou criar mais atividades para esta etapa, nas quais conciliem as funções afins e quadráticas.

7. ANÁLISE A POSTERIORI

Nesta etapa da Engenharia Didática é feita uma análise avaliativa de como ocorreu a experimentação para, posteriormente, na validação da Engenharia, verificarmos o que deu certo durante a prática e o que pode ser modificado. Para verificarmos se as nossas hipóteses se consolidaram durante a prática ou não, faremos uma análise de todo o material que coletamos durante a experimentação.

7.1. ANÁLISE ETAPA 1

Nesta etapa duas atividades foram elaboradas para que os alunos pudessem trabalhar com funções afins e quadráticas. Estas atividades tinham como objetivo relacionar as funções na sua forma algébrica para a forma geométrica, porém, na primeira parte das atividades, os alunos não teriam condições de fazer estas relações de forma generalizada, mas eles teriam exemplos que mostravam as diferenças de um gráfico para o outro com as mudanças dos coeficientes. Neste caso, nossa hipótese seria que os alunos começariam a visualizar estes movimentos a partir da segunda etapa de cada atividade, na qual os alunos foram bastante indagados nas comparações de gráfico para gráfico, e puderam ter uma noção sobre o papel dos coeficientes nos gráficos. Outra hipótese que tivemos foi a de que os alunos poderiam encontrar dificuldade no uso do software, porém, os alunos tiveram facilidade em utilizá-lo.

Durante a etapa de procedimentos, os alunos utilizaram do software para fazer uma relação de dados de entrada e os resultados obtidos, ou seja, os alunos usaram do software como uma ferramenta para chegar ao resultado. Mesmo utilizando o recurso de editar a função a partir da função afim $y = x$ ou da função quadrática $y = x^2$, os alunos utilizaram de forma que os conceitos matemáticos envolvidos ainda não estavam claros. Era possível observar que os alunos visualizavam as mudanças dos gráficos, mas existiu a dificuldade de entender o porquê do gráfico se modificar daquela maneira.

Pudemos avançar nestes conceitos a partir da segunda parte das atividades. Buscamos criar um ambiente no qual o aluno pudesse pensar na resposta, sendo assim, alcançamos o nosso objetivo de fazer o aluno observar a relação existente mudando o valor dos coeficientes das funções afins e quadráticas. Porém, essa conversa com os alunos poderia não ser o bastante para que os conceitos fossem compreendidos naquele momento, mas os alunos tiveram a oportunidade de criar as suas relações entre as formas algébrica e geométrica de modo autônoma, ou seja, puderam fazer as suas próprias relações.

7.2. ANÁLISE ETAPA 2

Na etapa 2, os alunos deveriam construir os gráficos que geravam as superfícies que estavam sendo pedidas. Nesta etapa, acreditamos que os procedimentos já estavam compreendidos, ou seja, os alunos alcançavam o resultado, porém ainda não conseguiam efetuar a relação entre o problema e o resultado obtido. Nossa hipótese era que os alunos se voltassem para os conceitos matemáticos envolvidos na atividade, prosseguindo na etapa de processo.

Percebemos nesta etapa que as duplas e os trios tiveram maios interação para a realização da atividade, estas trocas de ideias e de conhecimentos entre os alunos foram fundamentais para o bom rendimento dos alunos para a resolução dos problemas.

Foi possível observar que no inicio da atividade algumas duplas se sentiram desconfortáveis com a atividade e constamos que o motivo deste desconforto foi a imagem da superfície de revolução. Acreditamos que por ser uma situação inusitada para eles, pois os alunos ainda não sabiam o que era uma superfície de revolução, a não ser na aula que preparamos para conhecerem o software, os alunos não sabiam o que fazer naquele momento. Foi necessária uma intervenção para que eles pudessem seguir uma linha de raciocínio para a continuidade da atividade. Esta intervenção foi crucial para que os alunos dessem continuidade ao trabalho, tendo como dificuldades posteriores apenas detalhes, como o eixo de rotação e o domínio a ser utilizado como relatado no capítulo anterior.

Acreditamos que os alunos tiveram um bom rendimento nesta atividade, convergindo com as nossas hipóteses. Cada dupla conseguiu utilizar os conhecimentos vistos na etapa anterior para a conclusão desta atividade. Observamos que os alunos conseguiram consolidar o procedimento para dar mais atenção aos conceitos matemáticos que a atividade exigia, relacionando cada uma das superfícies aos movimentos dos coeficientes das funções afins e quadráticas.

7.3. ANÁLISE ETAPA 3

Nesta etapa os alunos deveriam construir uma superfície que se parecesse com uma das imagens que poderiam ser escolhidas na atividade. Era necessário que eles encontrassem funções que ao revolucionar se parecessem com a imagem escolhida. Nossa hipótese era a de que o aluno conseguisse fazer a relação dos símbolos com a representação gráfica na qual ele precisava, ou seja, que os coeficientes da forma algébrica da função afim e da forma canônica da função quadrática se tornassem símbolos nos quais o aluno consegue relacionar com os movimentos dos gráficos. Essas relações dos símbolos com os conceitos matemáticos presentes nas construções dos gráficos são a etapa de *proceito*, referente à Teoria dos Níveis de Sofisticação do Desenvolvimento Cognitivo de Tall.

Apesar de alguns alunos terem dificuldade de encontrar um gráfico que representasse posteriormente uma superfície que lembrava a figura escolhida, percebemos que os alunos tiveram criatividade no momento de construir as imagens. Observamos que os alunos tiveram capacidade de construir um gráfico da forma e na posição que eles desejavam; alguns atribuindo valores para inclinar mais a reta ou modificar a concavidade da parábola para que elas pudessem ficar na melhor posição possível para, depois de revolucionar, a superfície ficar parecida com a imagem, mas percebemos que, apesar das atribuições de valores, que serviram para “ajeitar” as funções para ficarem mais similares quando forem revolucionadas, os alunos conseguiam fazer as relações entre os coeficientes e os movimentos dos gráficos.

Ficamos satisfeitos com os resultados obtidos pelos alunos nesta etapa da atividade. Percebemos que eles estavam gostando do que estavam fazendo e também ficaram satisfeitos com os seus trabalhos concluídos.

8. VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA

Nesta última etapa da Engenharia Didática, foi analisado o que deu certo e o que pode ser melhorado na proposta de ensino que foi elaborada. A validação da Engenharia Didática é fundamentada no confronto entre as análises a *priori* e a *posteriori* (ARTIGUE, 1996). O que será fundamental para a validação da proposta será a verificação das etapas analisadas anteriormente, desde as análises a *priori*, na qual fizemos as escolhas para a aplicação da proposta didática, até as análises *posteriori*, na qual analisamos se as hipóteses levantadas foram confirmadas. Iniciaremos verificando se as escolhas que fizemos para a elaboração de nossa proposta contribuíram para o aprendizado dos alunos de alguma forma.

Em relação ao uso do software Winplot, acreditamos que obtivemos sucesso. Os alunos não tiveram dificuldade em utilizar os softwares e suas ferramentas, sendo que as poucas dúvidas que eles tiveram foram solucionadas durante as atividades. Acreditamos também que a facilidade que os alunos tiveram com o software deve-se ao contato frequente que eles têm com o computador. Além disso, podemos destacar que o uso do software foi uma ferramenta motivadora para os alunos, pois a proximidade que eles têm com o computador e o ambiente fora da sala de aula tradicional os deixaram mais motivados para realizarem as atividades. A utilização de um ambiente informatizado, diferente do tradicional “quadro negro” foi uma escolha válida para que os alunos pudessem realizar atividades com propostas diferentes das habituais.

As escolhas referentes à Teoria da Sofisticação do Desenvolvimento Cognitivo de David Tall nos trouxeram excelentes retornos durante a realização da sequência de atividade propostas para os alunos. Ao elaborarmos as etapas, pensando nos níveis de sofisticação *procedimento, processo* e *proceito*, tivemos sucesso em relação ao que havíamos planejado. Acreditamos que os alunos, ao decorrer das atividades, passaram por todos os níveis de sofisticação, alcançando o objetivo de fazer as relações entre os símbolos matemáticos (coeficientes das funções trabalhadas) com os conceitos matemáticos envolvidos; constatamos essa afirmação a partir das observações e conversas feitas ao decorrer das atividades e dos produtos finais dos trabalhos.

Na etapa 1, a etapa de procedimentos esteve presente, na qual os alunos fazem a relação entre gráficos de funções afins e quadráticas com as suas respectivas formas algébricas, utilizando o software para construí-las sem ter a necessidade do entendimento dos conceitos envolvidos. Também fizemos a escolha de criar um ambiente de debate para introduzir a função dos coeficientes, das funções afins e da forma canônica da função quadrática, nos gráficos. Acreditamos que essa etapa de conversação com os alunos e indagações fez com que os alunos pudessem participar de forma ativa no desenvolvimento da aprendizagem deles, fazendo com que o aluno, utilizando exemplos particulares, criasse relações entre os coeficientes das formas algébricas das funções com seus gráficos, para, posteriormente, fazer esta relação de forma generalizada no decorrer das atividades seguintes.

Outra escolha que consideramos válida foi a realização das atividades em duplas. Como os alunos puderam escolher as duplas por afinidade, eles se sentiram mais a vontade para poderem trocar ideias, debatendo sobre a melhor forma de resolver os problemas propostos.

Nas duas atividades da primeira etapa, os alunos deveriam relacionar os gráficos das funções com as suas respectivas formas algébricas para posteriormente analisarem as diferenças de gráfico para gráfico. Objetivamos nesta atividade que os alunos percebessem as mudanças destes gráficos particulares a partir de suas representações algébricas. Inicialmente os alunos utilizaram o software para fazer essa relação entre gráfico e lei da função, o que concordamos ser válido, pois, neste momento, eles estavam na etapa de procedimento, no qual o aluno ainda não tem muitas noções dos conceitos matemáticos envolvidos, mas ele possui a ferramenta necessária para encontrar os resultados. Na segunda parte da atividade, na qual analisaríamos os gráficos e suas leis, os alunos puderam opinar e criar suas próprias teorias para verificar o que estava acontecendo com cada um dos gráficos em comparação com a sua forma algébrica. Neste momento, onde os alunos estão criando as suas teorias, e utilizando a intuição para justificar as mudanças dos gráficos, ocorreu como havíamos previsto e a nossa tentativa de criar um ambiente no qual o aluno pudesse desenvolver o seu raciocínio e suas próprias relações realmente aconteceu.

Nos questionários, identificaram-se dificuldades dos alunos em expressarem pensamentos por meio da escrita, assim como vimos anteriormente. Em todas as etapas, alguns alunos não conseguiram expressar exatamente o que constatamos que eles fizeram com detalhes. Acreditamos que os alunos não têm a prática da escrita em matemática, o que dificultou os registros onde os alunos deveriam descrever matematicamente seus raciocínios.

Na etapa 2, os alunos deveriam construir os gráficos que originavam as superfícies de revolução. Tinha-se como objetivo que os alunos conseguissem identificar as funções a partir das superfícies construídas no software e recriá-las. Neste momento, os alunos deveriam utilizar procedimentos para desenvolver a etapa de processos, passando desta forma a priorizar os conceitos matemáticos envolvidos na atividade. Apesar de inicialmente alguns alunos ficaram sem saber o que fazer nesta atividade, e também demonstrarem dificuldades em algumas situações, de modo geral, os alunos compreenderam os objetivos da atividade. Podemos perceber que eles compreenderam a função dos coeficientes nos gráficos uma a uma, ou seja, eles conseguiram visualizar, separadamente, a relação que cada coeficiente da representação algébrica tem com a representação gráfica. Para solucionar o problema no qual os alunos ficaram sem saber como desenvolver a atividade, acreditamos que alguns exercícios simples de encontrar o gráfico que cria uma superfície dada possam ser abordados na aula em que os alunos tiveram o primeiro contato com o software, já que nesta aula, apenas revolucionamos funções para encontrar uma superfície.

Como visto anteriormente, tanto nesta etapa como na etapa 3, nas construções que havia interseções, os alunos utilizaram a ferramenta "mostrar arco" para encontrá-las. Devido a isso, vimos que não há a necessidade de incluir os conceitos de interseções de funções nessas atividades, pois constatamos na análise prévia que os alunos sabem encontrar os pontos de interseção de funções.

Na etapa 3, cada dupla deveria representar no software uma imagem (na qual eles poderiam escolher na própria atividade ou pesquisar), utilizando superfícies de revolução. Para isso, o aluno deveria pensar em funções nas quais elas pudessem, quando revolucionadas, criar uma superfície que se parecesse com a imagem. Nesta etapa, os alunos passariam para o último nível de sofisticação, o *proceito*. Sendo assim, os alunos teriam as generalizações das formas algébricas da função afim e da forma canônica da função quadrática como símbolos que representam os conceitos matemáticos encontrados nas construções dos gráficos dessas funções. Para isso o aluno necessitava ter o domínio dos coeficientes e de suas funções nos gráficos. Esse domínio se justifica pela relação que eles fazem dos símbolos matemáticos existentes nas representações algébricas em relação aos movimentos dos gráficos. Consideramos que os objetivos nesta etapa foram alcançados, pois os alunos conseguiram articular a representação algébrica e geométrica de forma satisfatória.

De forma geral, pode-se validar a sequência didática, pois ela contribuiu para que os alunos pudessem melhorar seus entendimentos em relação aos coeficientes das funções trabalhadas, além de conseguirem realizar as relações dos objetos na sua forma algébrica e geométrica.

Após a análise a *posteriori*, concluímos que uma grande parte de nossas hipóteses foram confirmadas. Apesar de algumas limitações na nossa sequência didática, como a pouca ênfase no estudo das intersecções dos gráficos das funções, que propiciou as aproximações de valores para a restrição do domínio das funções na etapa 3, e a falta da elaboração de atividades nos quais exijam que o aluno identifique as funções dos gráficos que geram uma dada superfície de revolução, como enaltecido anteriormente na etapa dois da experimentação, elas não invalidam a Engenharia, mas sim, contribuem de forma favorável para que possamos aperfeiçoar a nossa proposta. Acreditamos também que a etapa 3 poderia ter mais atividades, ou atividades que misturassem mais funções afins e quadráticas, ou pelo menos que os alunos construíssem mais de uma figura. Consideramos que a proposta de ensino foi válida, pois notamos uma significativa melhora dos conhecimentos dos alunos que participaram de todas as etapas que propomos, em relação as suas representações gráficas das funções afins e quadráticas.

A escolha de um ambiente informatizado utilizando o software Winplot, as atividades realizadas em duplas, nas quais geraram discussões a partir de argumentações e as próprias atividades elaboradas, foram instrumentos que favoreceram para à motivação dos alunos durante a aplicação da sequência, o que é fundamental nos processos de uma aprendizagem ativa.

> Se há uma unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores e Ciências e a Matemática, é quando à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo. Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em um grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar; dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas. (BRASIl, 2000, p. 52)

Desta forma, podemos afirmar que a proposta de ensino de funções afins e quadráticas com o software Winplot é válida, pois contribuiu para uma melhora qualitativa na aprendizagem dos alunos em relação a articulação de suas representações algébrica e geométrica através de ambientes informatizados, nos mostrando o quanto a tecnologia pode ser importante, quando bem utilizadas, nas aulas de Matemática.

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa oportunizou apresentar uma abordagem dos conteúdos de funções afins e quadráticas visando sua aprendizagem. Procuramos então, desenvolver uma proposta de ensino na qual o objetivo seria que o aluno pudesse relacionar a representação algébrica das funções com as suas respectivas representações geométricas.

Para a construção da sequência de ensino e para a organização do trabalho, utilizamos a metodologia de pesquisa Engenharia Didática. Essa metodologia colaborou na reflexão de como organizar uma sequencia didática tendo por finalidade diminuir as dificuldades que a grande parte dos alunos apresenta nos conteúdos citados.

Além da Engenharia Didática, utilizamos nas etapas de nossa proposta, a Teoria dos Níveis de Sofisticação do Desenvolvimento Cognitivo de David Tall, na qual ele apresenta as três etapas, procedimento, processo e *proceito*, que facilitam a reformulação cognitiva necessária para a transição de um modo de pensar mais técnico, para uma forma de pensar mais formal, ou seja, em nossa sequência didática, os alunos passaram pela etapa de procedimento, em que eles encontravam a resposta do problema de forma que os conceitos matemáticos ainda não eram facilmente visualizados, pela etapa de processo, na qual os alunos utilizavam-se dos procedimentos para ter início aos estudos dos conceitos matemáticos envolvidos, para finalmente, entrarem na etapa de *proceito*, desenvolvendo uma relação dos símbolos das representações algébricas com as suas funções na representação geométrica, para que os conceitos sejam enfim sejam compreendidos como um todo.

Foi constatado que, através do confronto entre as análises a *priori* e a *posteriori*, a nossa proposta de ensino foi, em geral, válida, porém alguns pontos devem ser aperfeiçoados. Através das análises e do desenvolvimento das aulas em que foram aplicadas as atividades, observamos o interesse dos alunos e os resultados das produções dos trabalhos comprovam isto. Com a utilização do software Winplot, percebemos uma melhora significativa na compreensão das relações das representações algébricas e geométricas das funções por parte dos alunos que participaram das etapas de nossa proposta de ensino. A partir disso, podemos considerar respondida a pergunta que norteou nossa pesquisa, que o software Winplot pode atuar favoravelmente no auxilio aos alunos nas relações entre as representações algébricas e geométricas de funções afins e quadráticas.

Acreditamos que atingimos o objetivo de elaborar uma aula diferente da tradicional, que proporcionasse um ambiente no qual fosse possível o desenvolvimento autônomo do aluno na construção do conhecimento. Conseguimos fazer com que a turma participasse da aula e se interessasse pelo conteúdo abordado de forma efetiva.

Percebemos as vantagens que encontramos ao utilizar o winplot para nos auxiliar no ensino de funções afins e quadráticas, o que nos leva a acreditar no potencial deste software e sua utilização pelos professores como uma alternativa para enriquecer as suas aulas. O uso da tecnologia, com certeza, não é a solução para os problemas do ensino, todavia a tecnologia pode contribuir para um ambiente mais interessante e motivador para o desenvolvimento da aprendizagem.

Ressaltamos o quanto é importante que os professores estejam sempre em busca de novas alternativas e recursos para a melhora qualitativa do ensino, e ainda, se tratando do ensino de Matemática, esta procura se torna ainda mais necessária, pois muitos alunos possuem dificuldade em relação a aprendizagem dos conteúdos matemáticos. A Matemática é muitas vezes considerada a matéria mais difícil, porém, acreditamos ser possível minimizar esta perspectiva criada pelos alunos através de formas de ensino que se diferem das habituais. Ao término desta pesquisa, foi possível verificar a importância de desenvolver atividades que diferem das que já são do cotidiano do aluno em sala de aula, pois percebemos que os alunos se motivaram na realização da sequência de atividades que propomos à eles.

Ficamos satisfeitos com os resultados obtidos na pesquisa, pois, além de contribuir para a nossa formação como professor e para o desenvolvimento tanto como professor de Matemática quanto como pesquisador, tivemos uma boa resposta dos alunos em relação à nossa proposta de ensino, desde a motivação até a melhora qualitativa na compreensão dos conteúdos trabalhados. Esperamos que esta pesquisa possa motivar outros professores de matemática a planejarem suas aulas utilizando métodos diferentes ao abordar determinados conteúdos; e que o uso de tecnologia esteja cada vez mais presente como uma forte ferramenta para auxiliar no ensino e aprendizagem dentro da escola.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michele. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes pedagógicos, 1996, p. 193-217.

BALEJO, Clarissa Coragem. **Uso de Software no Ensino de Funções Polinomiais no Ensino Médio**. Trabalho de conclusão de curso. UFRGS, 2009, 60p.

BOTELHO, Leila; REZENDE Wanderley. **Um Breve Histórico do Conceito de Função. Caderno dá Licença**. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense v.6. Niterói, 200. Disponível em:<http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume6/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf>

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). Secretaria da Educação Básica (SEB). **Guia do Livros Didáditos PNLD 2012 – Matemática.** Brasília, 2012. Disponível em: < http://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20112/mat0412/pnld2012emmatematica.pdf>

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio, 2000.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **Zetetike**, Campinas-UNICAMP, v. 12, n. 23, 2005, p. 85-118.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Contribuições para a formação do professor de Matemática Pesquisador nos Mestrados Profissionalizantes na Área de Ensino. **Bolema**, Rio Claro – SP, ano 21, n° 29, 2008, p. 199 a 222.

COSER, Marcelo Salvador Filho**. Aprendizagem de Matemática financeira no ensino médio: uma proposta de trabalho a partir de planilhas eletrônicas**. Dissertação – Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre (RS), 2008.

FRANCO, Hernando José Rocha. **Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura num curso de Álgebra: Identificação e análise**. Tese de Doutorado. UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA. 2011, 100p.

GAUTO, Natássia Knecht. **GRAFEQ no processo de Ensino e Aprendizagem de Funções Afins.** Trabalho de Conclusão de Curso. UFRGS, 2012, 81p.

GRAY, Eddie; TALL, David. (1994). **Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic**. Journal for Research in Mathematics Education. n. 25, 1994, p. 116-140.

GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Mídias digitais na Educação Matemática. IN: GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; BÚRIGO, Elisabete Zardo; GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto. (Org.) **Matemática, Mídias Digitais e**

Didática: tripé para a formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraí, 2012.p.11-34.

MIORIM, Maria. Ângela**. Introdução à História da Matemática**. São Paulo, SP: Atual, 1998.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de função: uma abordagem do processo ensino aprendizagem.** Dissertação de Mestrado da Matemática, PUC – São Paulo – 176p.

PAPERT, Seymour Aubrey. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

TALL, David Orme. **Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities & Realities**. 1998. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>. Acesso em: 25/05/08.

TALL, David Orme. **Technology and Cognitive Growth in Mathematics: A discussion paper for the Conference on Mathematics and New Technologies, Thessaloniki, Greece**. 1999. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>. Acesso em: 25/05/08.

TALL, David Orme. **Cognitive Development In Advanced Mathematics Using Technology.** Mathematics Education Research Journal. University of Warwick v. 12, n. 3, 210-230, 2000.

VALENTE, José Armando. Diferentes usos do computador na educação. **Computadores e Conhecimento: repensando a educação**, p. 1-23, 1993. Disponível em < http://ffalm.br/gied/site/artigos/diferentesusoscomputador.pdf>. Acesso on line em 21 Maio 2014.

VALENTE, José Armando. Por quê o computador na educação. **Computadores e Conhecimento: repensando a educação.** Campinas: Gráfica da Unicamp, p. 24-44, 1993. Disponível em < http://www.jamilsoncampos.com.br/dmdocuments/PorQueoComputadornaEducacao.pf>. Acesso on line em 21 Maio 2014.

APÊNDICE A – ATIVIDADE PRÉVIA

Nome:____

Turma:_________ Data:___________

1- Construa os gráficos das seguintes funções afins:

a) $y = x + 1$

b) $y = -2x + 5$

2- Sabendo que uma função afim é da forma f(x) = ax+ b, a partir de teusconhecimentos, qual é o papel dos coeficientes a e b?

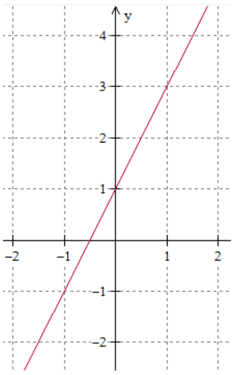
5 – Partindo da função quadrática $y = x^2$ construa os gráficos das seguintes funções quadráticas. Explicite teu raciocínio.

a) $y = x^2 - 4$

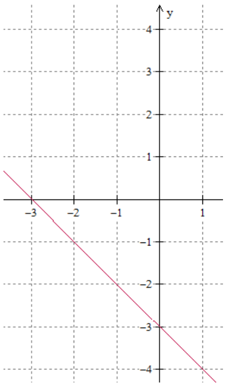
b) $y = -(x-1)^2 + 1$

6- Dê a lei da função que originam os seguintes gráficos

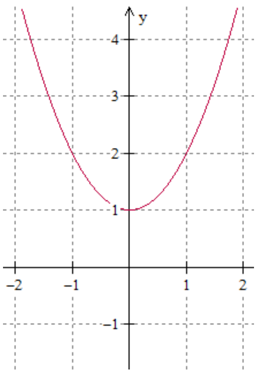
a)



b)



c)



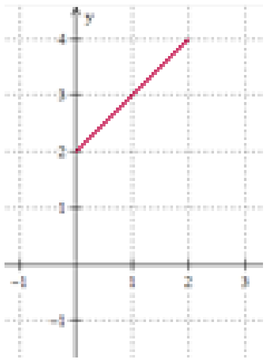
7- Calcule o ponto de intersecção das seguintes funções.

a) $f(x) = 2x + 1$ $\quad g(x) = -x - 2$

b) $f(x) = x + 1$ $\quad g(x) = x^2 - 1$

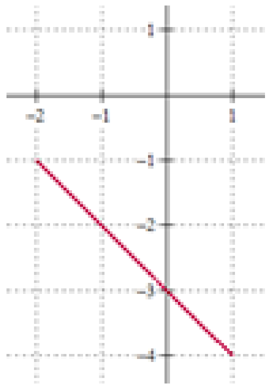
8- Relacione as funções com os seus repctivos domínio

a)



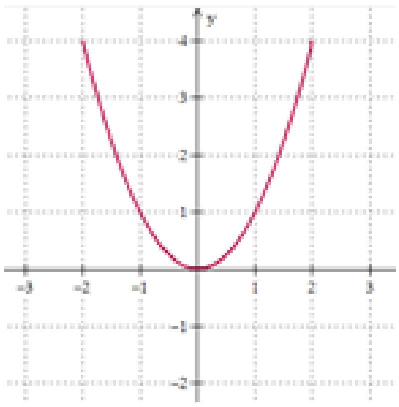
( ) $Dom. = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$

b)



( ) $Dom. = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

c)



( ) $Dom. = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

APENDICE B – TUTORIAL DO SOFTWARE WINPLOT

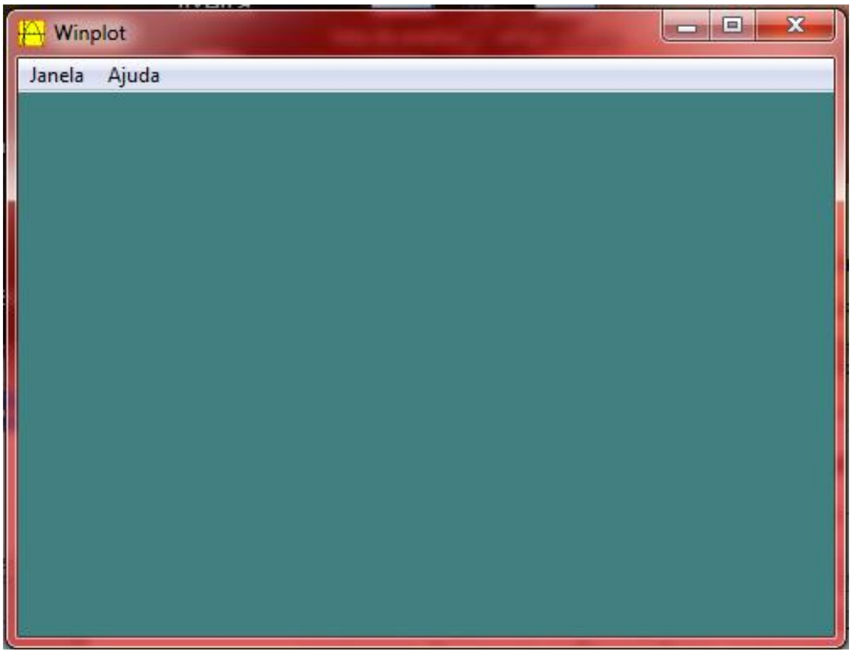
TUTORIAL DO WINPLOT – CRIANDO SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

O Winplot, criado pelo professor Richard Parris, da Phillips Exeter Academy, em New Hampshare, Estados Unidos, é um ótimo software de matemática que permite o estudo de conceitos de funções e equações, possibilitando que se trabalhe com gráficos de equações em duas ou três dimensões.

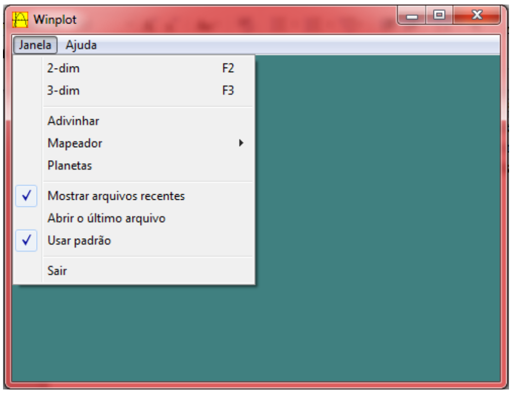
Uma de suas vantagens é por ele ser um programa "leve", ou seja, funciona em diversos computadores sem perder a sua eficiência e velocidade. Ele também tem a vantagem de ser um software livre, o que significa que é gratuito.

A seguir iremos descrever os passos, bem como explicar os comandos necessários para a realização da prática que envolve as funções afim e quadrática e as superfícies de revolução criadas a partir dos gráficos dessas funções. Como exemplo, serão descritos os passos e comandos necessários para a obtenção de um cilindro de revolução.

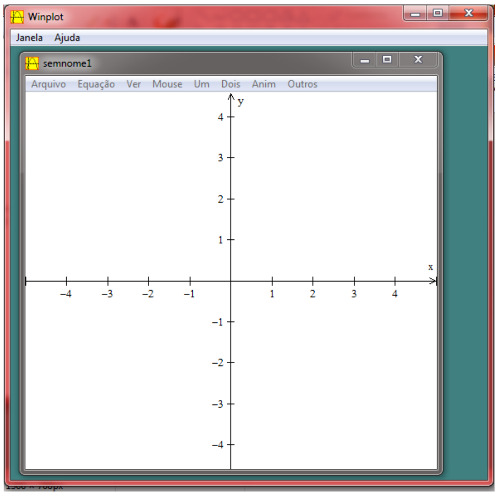
Quando dermos dois clique no ícone para abrir o programa irá aparecer a sua interface.



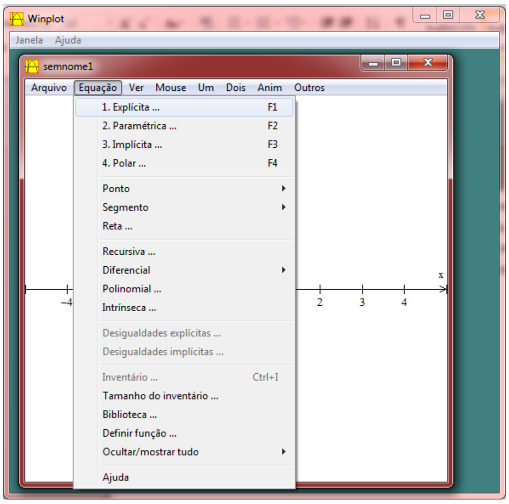
Note que na janela superior da interface do programa temos dois menus, um deles é *janela* e o outro é *ajuda*. Iniciaremos o nosso trabalho com um clique sobre o menu *janela*. Neste menu temos 7 opções de trabalho.



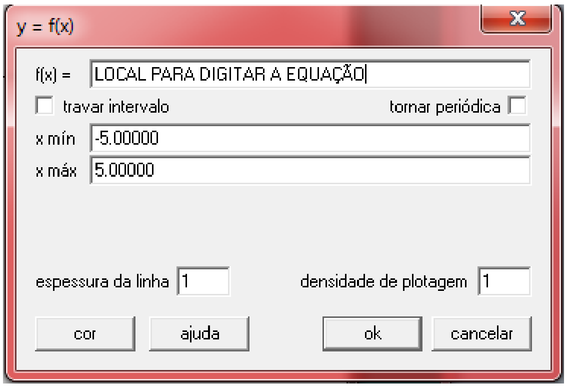
Como o nosso objetivo é trabalhar com retas e parábolas e suas equações no plano, iremos optar por duas dimensões *(2 – dim)*, sendo que posteriormente iremos utilizar o plano três dimensões para a visualizações dos objetos construídos. Após clicarmos em *(2 – dim)* será aberta a janela principal no ambiente de duas dimensões.



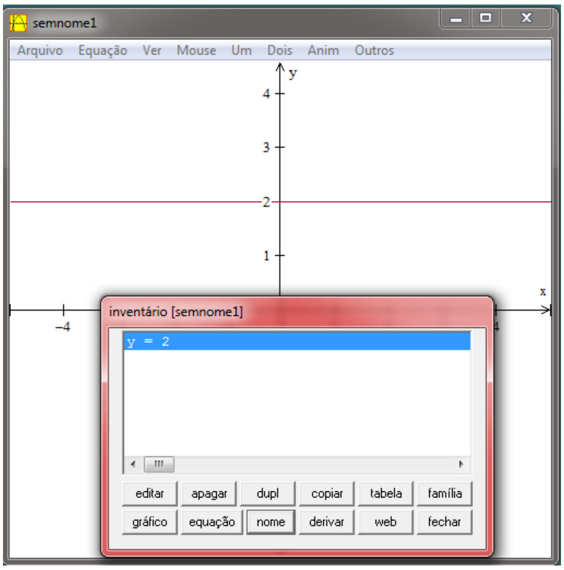
Este é o plano cartesiano que será utilizado para a representação gráfica das retas e circunferências. Na barra de ferramentas na parte superior da janela, temos oito novas opções de escolha. Iremos clicar no menu *Equação*, pois este menu apresenta as ferramentas de manipulação da funções e equações, entre outras.



Iremos clicar para inserir equações em *equação* e depois em *explícita*, sendo que trabalharemos com funções do tipo $f(x) = ax + b$ e $g(x) = k(x - c)^2 + d$. Logo após clicaremos uma nova janela irá abrir, para digitarmos a equação da reta.

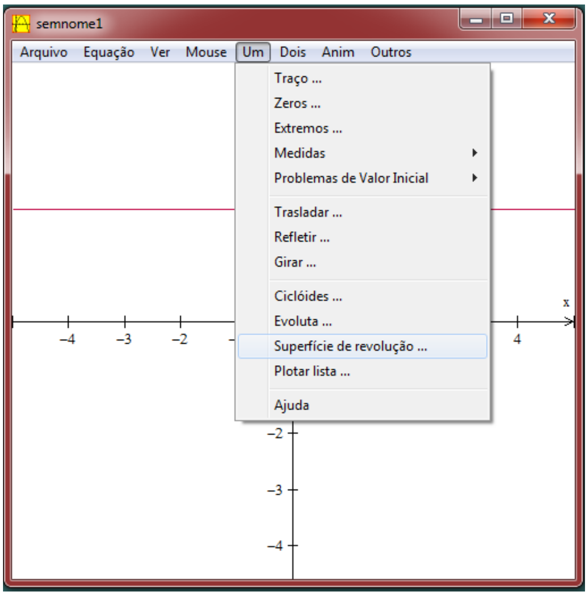


Como foi comentado no início do tutorial, estamos interessados em construir um cilindro de revolução. Inicialmente iremos contruir a reta $f(x) = 2$. Logo após escreveremos a equação e clicamos no botão *ok* e irá aparecer nosso gráfico e uma nova janela com o nome de $inventário$.

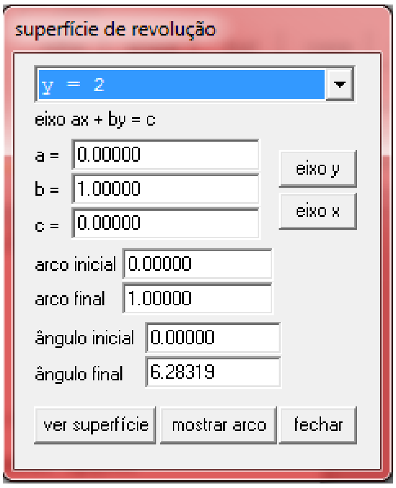


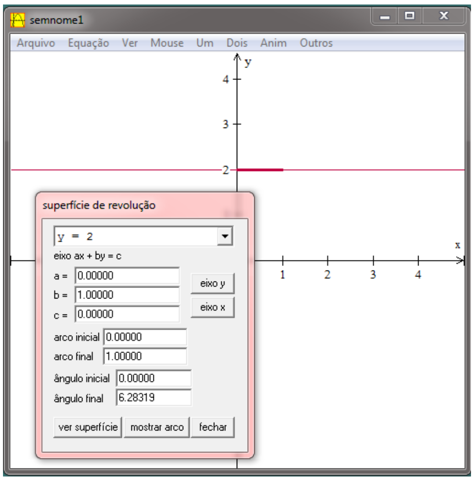
Agora temos a reta na cor vermelha e na mesma imagem aparece a janela inventário com alguns botões, entre eles os de maior interesse para nós serão os botões *editar* que nos permite "arrumar" a reta construída se ela não for a desejada e o botão *dupl*, que serve para inserirmos novas retas ou parábolas no plano. Quando clicamos em *dupl* abrirá novamente a janela para inserirmos novas retas ou parábolas, se necessário.

Para obtermos agora o cilindro de revolução, precisamos "girar" a reta construída em torno do eixo de rotação que também é representado por outra equação de reta. Agora utilizaremos o menu *Um*, que também apresenta diversas opções mas estamos interessados na opção *superfícies de revolução.*



Iremos clicar no botão *Superfície de revolução* e uma nova janela com opções para a rotação irá aparecer. Após aparecer a equação da reta temos algumas opções entre elas: equação da reta que realizará a rotação, inserindo-se os coeficientes da reta, ou arcos iniciais e finais da reta que representam o domínio da nossa função. No exemplo abaixo nosso domínio é o intervalo [0,1], a parte mais vermelha da reta. Clicando em *mostrar arco* ela aparecerá indicada com uma cor mais escura que a reta.

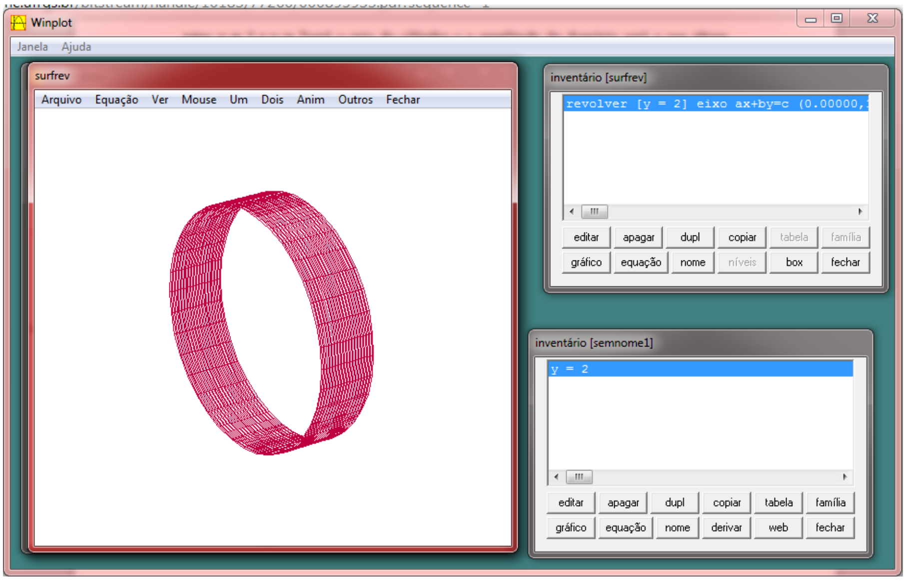




Podemos observar que ainda devemos indicar os parâmetros da reta que utilizaremos como eixo de rotação nos coeficientes de a, b e c e o ângulo inicial e final que indicam o início e o fim da rotação. O ângulo é dado em radianos.

Como queremos obter um cilindro de revolução, temos que usar uma reta paralela a reta construída e fazer uma rotação de 2π radianos. Para uma reta ser paralela à reta $f(x) = 2$ ela tem que ter os parâmetro $a = 0, b = 1$. Para o parâmetro c, neste caso, podemos escolher qualquer número real com exceção do 2, para não termos uma rotação em torno dela mesma, o que não geraria superfície alguma. Para este exemplo, tomamos $c = 0$, que também podemos obter clicando em *eixo x*, ou seja, termos uma rotação em torno do eixo x.

Realizada a inserção dos dados necessários para a rotação iremos clicar no botão *ver superfície* e irá aparecer o sólido obtido com a rotação.



APÊNDICE C – FORMA CANÔNICA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Sabe-se que a função quadrática é determinada pela seguinte expressão:

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$$

Contudo, se fizermos algumas manipulações algébricas do lado direito desta igualdade, por meio do processo de completar quadrados.

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$$

$$f(x) = a\left[\boldsymbol{x^2 + \frac{b}{a}x} + \frac{c}{a}\right]$$

Veja que as duas parcelas destacadas podem ser usadas para o processo de completar quadrados:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = \boldsymbol{x^2 + \frac{b}{a}x} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Portanto, basta somarmos e subtrairmos o último termo na nossa função f(x) (*Processo para completar quadrados*).

Sendo assim, completando o quadrado na função, temos:

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = \mathrm{a}\left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}\right] \text{ (reescrevendo a expressão)}$$

$$\boldsymbol{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]} => \mathit{Forma\ can\hat{o}nica}$$

Essa expressão também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

Chamando de:

$$m = -\frac{b}{2a} \quad e \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Sendo assim, outra maneira de escrevermos a função quadrática de forma canônica é:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k$$

Façamos um exemplo no qual devemos escrever uma função quadrática qualquer:

$$f(x) = x^2 - 3x - 7$$

Devemos destacar os coeficientes e determinar os valores de **m** e **k**:

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = -7$$

$$m = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$$

$$k = f(m) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 7 = -\frac{37}{4} \rightarrow k = -\frac{37}{4}$$

$$Então: f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}$$

A forma canônica facilita a visualização das propriedades das funções de 2º grau para favorecer as construções dos seus gráficos.

APENDICE D – ETAPA 1 DA PROPOSTA DIDÁTICA

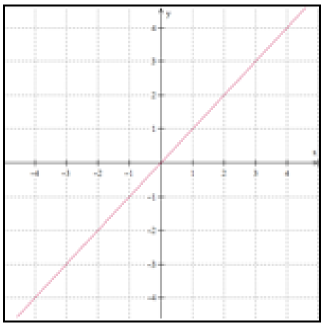
Nomes: ____

Data:___________________ Turma:_____________

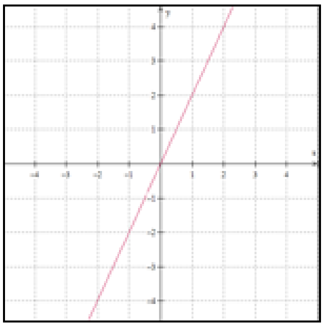
ETAPA 1: 2 períodos

Atividade 1: Relacione os gráficos de funções afins com as suas respectivas representações algébricas.

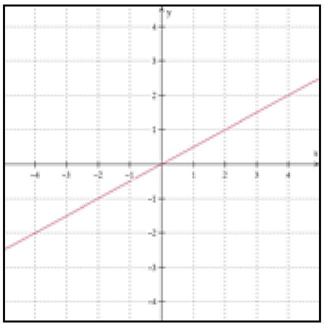
1.



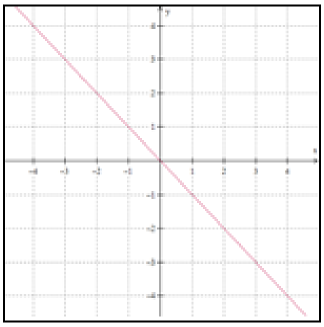
2.



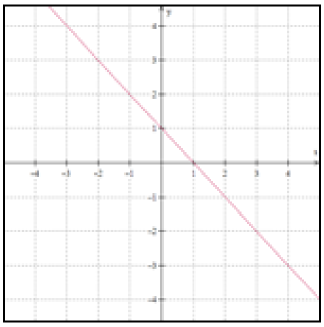
3.



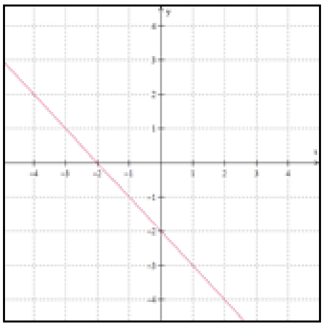
4.



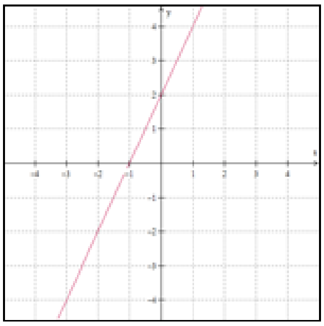
5.



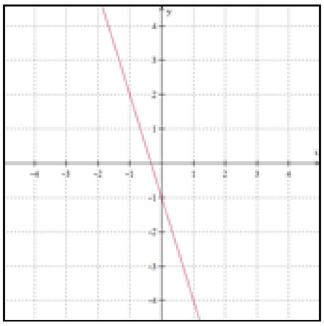
6.



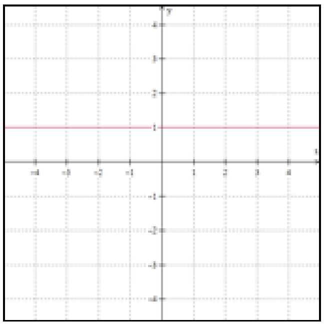
7.



8.



9.



( ) $f(x) = -x$ ( ) $f(x) = \frac{x}{2}$ ( ) $f(x) = -x - 2$

( ) $f(x) = -x + 1$ ( ) $f(x) = 1$ ( ) $f(x) = 2x + 2$

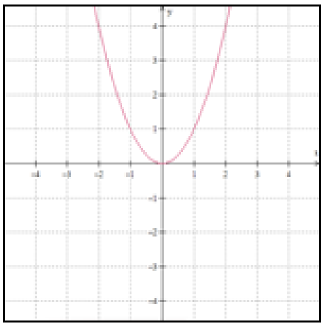
( ) $f(x) = x$ ( ) $f(x) = -3x - 1$ ( ) $f(x) = 2x$

Questionário 1:

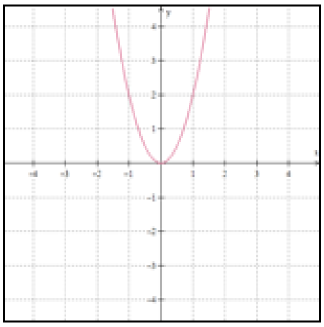
Após o que foi discutido em relação aos movimentos dos gráficos de função afim, escreva com as suas palavras sobre o papel dos coeficientes da função $f(x) = ax + b$.

Atividade 2: Sabendo que a equação de segundo grau representada por f(x) = ax² + bx +c, também pode ser representada na forma canônica f(x) = a(x - m)² + k, relacione as parábolas abaixo com suas respectivas representações algébricas.

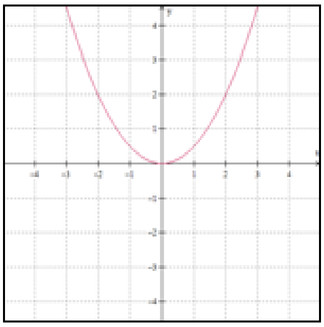
1.



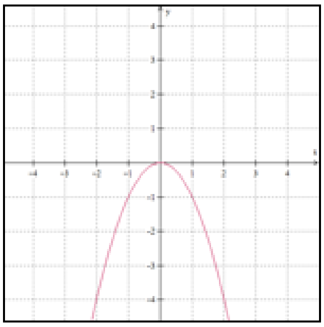
2.



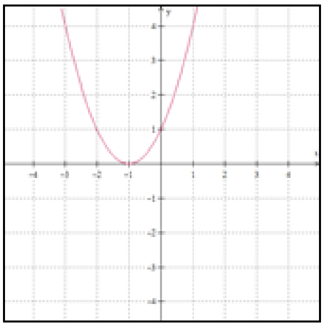
3.



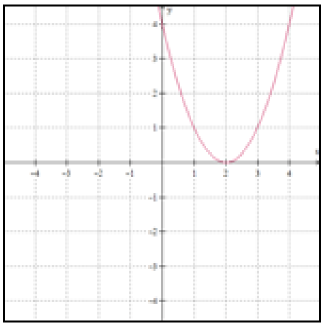
4.



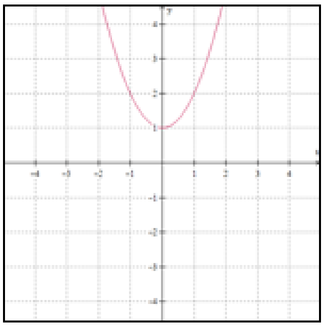
5.



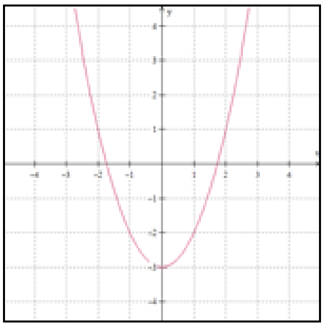
6.



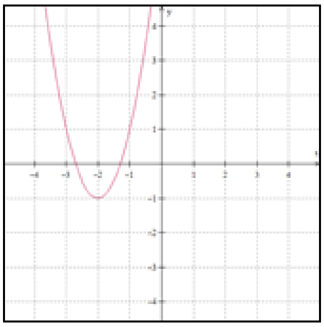
7.



8.



9.



( ) $f(x) = -x^2$ ( ) $f(x) = x^2 + 1$ ( ) $f(x) = x^2$

( ) $f(x) = 2(x + 2)^2 - 1$ ( ) $f(x) = \frac{x^2}{2}$ ( ) $f(x) = (x - 2)^2$

( ) $f(x) = 2x^2$ ( ) $f(x) = x^2 - 3$ ( ) $f(x) = (x + 1)^2$

Questionário 2:

Com o que você pode observar de nossas discussões, o que você pode concluir em relação aos movimentos dos gráficos de funções quadráticas? Sabendo que a forma canônica da função quadrática é $f(x) = a(x - m)^2 + k$, qual a função no gráfico de cada um dos coeficientes "a", "m" e "k"?

APENDICE E – ETAPA 2 DA PROPOSTA DIDÁTICA

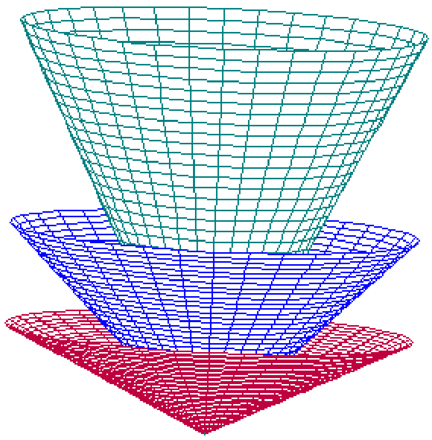
Nomes: ____

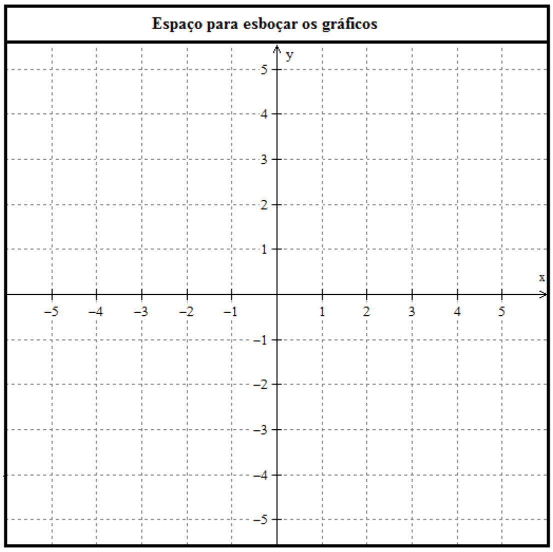
Data:___________________ Turma:_____________

ETAPA 2: 2 períodos

Atividade 3: Com base no que você pode perceber nas atividades anteriores referentes às relações dos gráficos com as suas expressões algébricas, construa as seguintes superfícies de revolução no Winplot esboçando os gráficos que você construiu a superfície e mostrando os seus cálculos especificando as leis das funções.

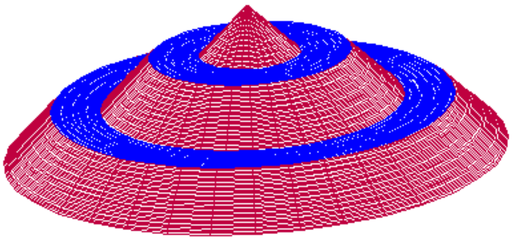
Superfície 1:

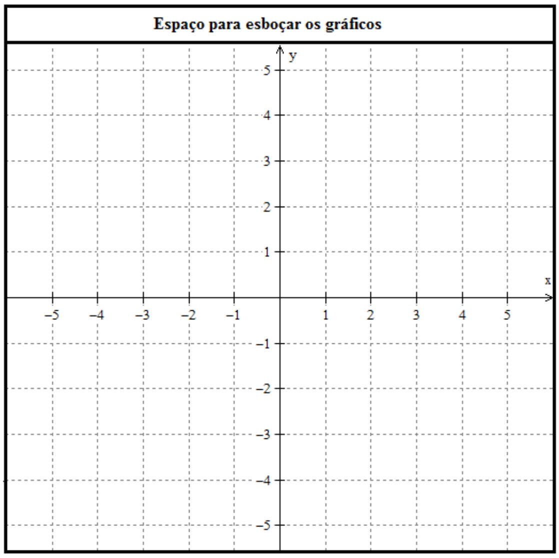




Espaço para cálculos

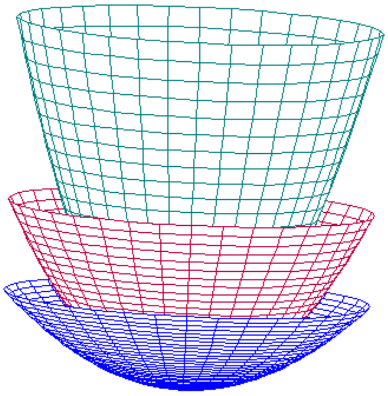
Superfície 2:



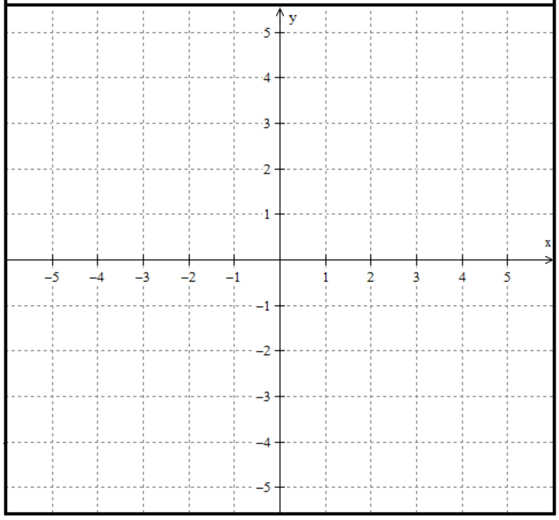


Espaço para cálculos

Superfície 3:

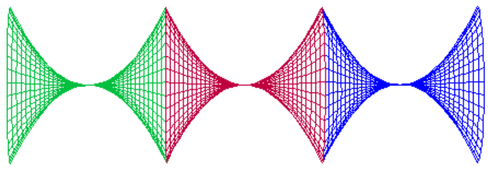


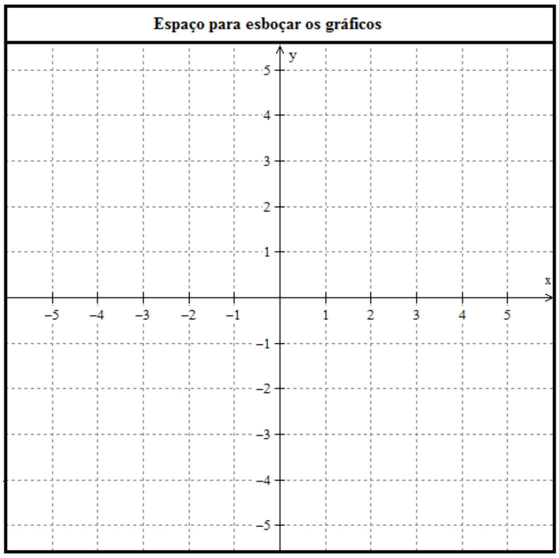
Espaço para esboçar os gráficos



Espaço para cálculos

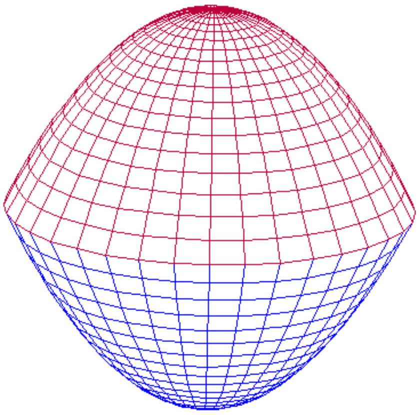
Superfície 4:



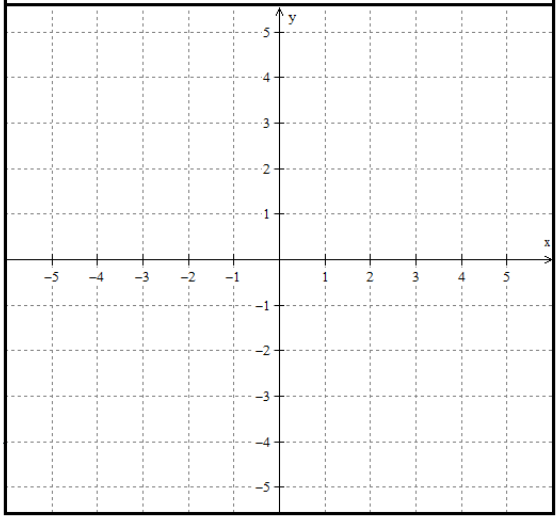


Espaço para cálculos

Superfície 5:



Espaço para esboçar os gráficos



Espaço para cálculos

APÊNDICE F – ETAPA 3 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nomes: ____

Data:___________________ Turma:____________

Etapa 3: 2 períodos

Atividade 4: Agora é a sua vez, escolha uma imagem para você construir no Winplot uma réplica por meio de retas e parábolas, utilizando as superfícies de revolução.

Você pode escolher umas das imagens abaixo, ou se preferir, pesquise uma imagem de sua preferência que possa construir com superfícies de revolução.

Figura 1: Cogumelo	Figura 2: Guarda-chuva	Figura 3 Abajur
		
Figura 4: Forma de bolo	Figura 5: Mesa	Figura 6: Taça
		

Questionário 3

1 – Qual imagem você escolheu e por quê? Inicialmente, você já tinha ideia de quais funções utilizar?

2- Escreva detalhadamente como você organizou as ideias para a construção no software, expondo suas dificuldades caso as tenha tido, especificando todas as funções que utilizou.

APÊNDICE G – TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G.______________, responsável pelo(a) aluno(a) ______________________________________, da turma _____________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Contribuições do Winplot no processo de ensino e aprendizagem de funções afins e quadráticas utilizando superfícies de revolução,** desenvolvida pelo pesquisador Bruno Silveira Corrêa. Fui informado(a), ainda que a pesquisa é orientada por Leandra Anversa Fioreze, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail leandra.fioreze@gmail.com.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo que, em linhas gerias, são

- Favorecer a autonomia intelectual dos alunos, solidificando e aprofundando conhecimentos já adquiridos.

- Desenvolver os conteúdos de funções afins e quadráticas em ambiente informatizado com auxílio do software matemático Winplot.

- Identificar se o estudo de gráficos de funções afins e quadráticas com o uso de software torna o aprendizado mais significativo e atrativo para os alunos.

- Estimular o interesse dos alunos através do uso do computador como um instrumento de ensino.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.) identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de questionário escrito e trabalhos realizados no laboratório de informática, bem cômoda participação em aula, em que ele(a) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(A), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tai como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável pelo e-mail bruno_s_c92@hotmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre,___ de _________________________ de __________.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura da Orientadora da pesquisa:

ANEXOS A – FOTOS DA EXPERIMENTAÇÃO

Figura 53 - Foto da experimentação

Figura 54 - Foto da experimentação

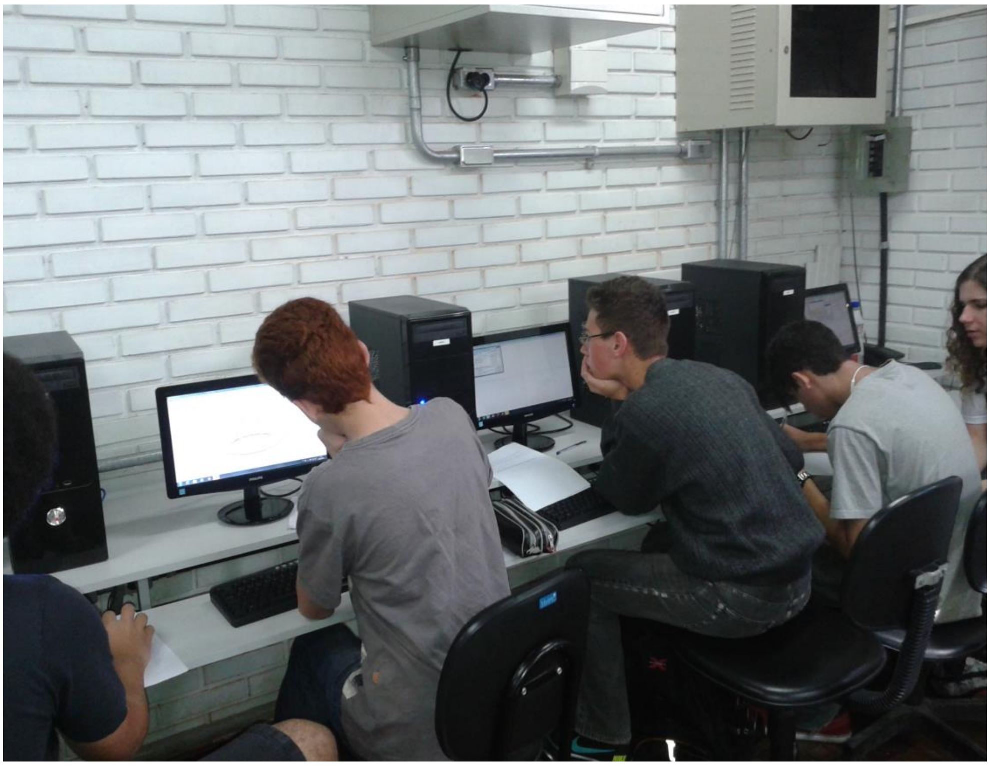


Figura 55 - Foto da experimentação