

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO DE TRELIÇAS PLANAS BASEADA EM CONFIABILIDADE

por

Diego Severo Antunes

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Junho de 2014.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica

OTIMIZAÇÃO DE TRELIÇAS PLANAS BASEADA EM CONFIABILIDADE

por

Diego Severo Antunes

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr.<sup>a</sup> Thamy Cristina Hayashi  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Ph.D. Jun Sérgio Ono Fonseca

Comissão de Avaliação:

Prof. Edson Hikaro Aseka

Prof. Juan Pablo Raggio Quintas

Prof. Letícia Fleck Fadel Miguel

Porto Alegre, Junho de 2014.

*“O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano.”*

Isaac Newton.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelas excelentes oportunidades que recebi, pela minha família e amigos.

Agradeço aos meus pais, Leonilda e Crescêncio Antunes, meus irmãos, Jônatas e Giovana, à minha noiva, Bruna, e seus pais, Regina e Flávio Loeser, que sempre me incentivaram e me apoiaram de todas as formas possíveis sem medir esforços, tornando tudo possível.

À Prof.<sup>a</sup> Tânia Seibert e ao pessoal do Colégio Sinodal, por terem acreditado em meu potencial, fornecendo-me oportunidades, apoio e incentivo no início de minha trajetória.

À UFRGS, seus professores e funcionários pela oportunidade de realizar o curso de Engenharia Mecânica, adquirindo diversos conhecimentos teóricos e práticos de Engenharia e outras áreas.

Ao meu orientador, Prof. Ph.D. Jun Fonseca pelos ensinamentos e suporte durante a realização deste trabalho.

A todos os meus amigos e familiares, que, direta ou indiretamente, participaram da minha formação e me ajudaram de alguma forma a alcançar meus objetivos.

Aos profissionais da Springer Carrier e da CAETE Engenharia que contribuíram para o meu desenvolvimento profissional e pessoal, bem como pela convivência e amizade.

ANTUNES, D. S. **Otimização de Treliças Planas baseada em Confiabilidade**. 2014. 28 páginas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma metodologia de otimização paramétrica para minimizar a massa total de material empregado na construção de estruturas metálicas planas de sustentação. As restrições impostas ao problema são baseadas em confiabilidade estrutural, onde é utilizado o Método de Elementos Finitos com formulação de elemento de barra para realização do cálculo estrutural. São analisadas treliças planas com uma forma determinada, nas quais a otimização visa minimizar a massa total através da redução do número de barras intermediárias, da redução da altura da estrutura e da redução da área das seções transversais de cada barra. Dessa forma, é utilizado o Método de Monte Carlo para o cálculo da Confiabilidade estrutural e a Otimização é realizada a partir da utilização do Método dos Algoritmos Genéticos. A plataforma de programação utilizada para construção dos algoritmos é o programa Scilab. A validação dos resultados estruturais desse algoritmo é baseada em simulação numérica com o programa comercial ANSYS®. As propriedades geométricas e de material das barras são determinadas a partir de bibliotecas específicas, desenvolvidas para os objetivos desse trabalho. Como resultado, é encontrado um tipo de estrutura com mínima massa que favoreça a facilidade de fabricação, a partir da utilização de perfis comerciais, sem comprometer seu desempenho.

**PALAVRAS-CHAVE:** Otimização; Treliças; Confiabilidade; Algoritmos Genéticos.

ANTUNES, D. S. **Optimization of plane Truss based in Reliability**. 2014. 28 pages. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

#### ABSTRACT

This study aims to develop a parametric optimization methodology to minimize the mass of a planar steel structure. The constraints imposed to the problem are based on structural reliability. The Finite Element Method is used to perform the structural analysis with bar formulation. Plane trusses with a predetermined layout are considered, and the optimization can change the height and the cross section of each bar. Thereby, it is used the Monte Carlo Method to the Structural Reliability Analysis and the optimization is performed using the Genetics Algorithms Method. The programming platform used to algorithms construction is the program Scilab. The validation of the structural results of this algorithm is based on numeric simulation performed with the commercial program ANSYS®. The geometric properties and material properties of the bars are obtained from specific libraries, developed for the objectives of this study. As a result, it is found the type of structure with minimum mass, which favors easy manufacturing, using commercial profiles, without compromising its performance.

**KEYWORDS:** Optimization; Truss; Reliability; Genetics Algorithms.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Revisão Bibliográfica.....	1
1.2. Objetivos .....	2
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	3
2.1. Método dos Elementos Finitos .....	3
2.1.1. Elemento de Barra .....	3
2.2. Flambagem de Euler.....	4
2.3. Confiabilidade Estrutural .....	5
2.3.1. Método de Monte Carlo.....	6
2.4. Otimização Estrutural .....	7
2.4.1. Método dos Algoritmos Genéticos.....	7
3. METODOLOGIA .....	8
4. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA.....	9
4.1. Caso 1.....	9
4.2. Caso 2.....	11
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	12
5.1. Caso 1.....	12
5.2. Caso 2.....	13
6. CONCLUSÕES .....	14
6.1. Sugestões para Trabalhos Futuros .....	14
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	14
APÊNDICE A – Validação do Método dos Elementos Finitos.....	16
APÊNDICE C – Curvas de Convergência para cada um dos casos analisados. ....	19
APÊNDICE D – Tabela comparativa entre os casos avaliados por Kuckoski, 2013, e o presente trabalho. ....	19
APÊNDICE E – Resultados gráficos comparativos entre os casos avaliados por Kuckoski e o presente trabalho. ....	20

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Configuração esquemática do tipo de treliça plana estudada. ....	2
Figura 2.1 – Gráfico das curvas do Critério de Flambagem local.....	5
Figura 2.2 – Gráfico das Distribuições Gaussianas da Resistência e Solicitação de uma estrutura, tratadas como variáveis aleatórias. Adaptado de ControlDesign, 2014 .....	6
Figura 3.1 – Fluxograma do Algoritmo desenvolvido. ....	9
Figura 4.1 – Esquema da treliça a ser otimizada. ....	10
Figura 4.2 – Treliça de 10 barras.....	11
Figura 5.1 – Curvas de Convergência. ....	12
Figura 5.2 – Estrutura otimizada, onde (a) carregamento e (b) resultados de tensão. A escala horizontal está reduzida. ....	13
Figura 5.3 – Configuração da treliça de 10 barras otimizada, com os resultados estruturais. ....	13

## 1. INTRODUÇÃO

A competitividade de mercado exige, cada vez mais, que o projeto de estruturas seja realizado de forma a utilizar a menor quantidade possível de materiais, mas sem prejudicar seu desempenho em operação. Dessa forma, o projeto ótimo de estruturas irá depender de sua aplicação, levando em consideração uma relação de compromisso entre custo e resistência necessária. De acordo com Haftka e Gürdal, 1992, a otimização pode ser definida como sendo a busca do melhor resultado para uma dada operação, satisfazendo certas restrições.

A Otimização Estrutural trata da minimização ou maximização de uma determinada característica de interesse em uma estrutura. Podem ser citados como exemplos a minimização de massa, de volume, ou, ainda, a maximização da rigidez. Dessa forma, pode ser definida como um método de encontrar pontos de máximos ou mínimos de uma função, podendo ou não ter restrições de valores a assumir.

O conceito de Otimização Estrutural foi, inicialmente, estudado por Maxwell em 1872 e, posteriormente, por Michell em 1904. Nesses estudos, partindo do critério de máxima rigidez e menor peso, foi calculado o campo de tensões principais de um determinado corpo infinito, sujeito a vinculações. Assim, eram adicionados elementos de barra alinhados com as direções das tensões principais desse corpo. Com isso, era reduzido o peso da estrutura, pois os elementos utilizados eram treliças, que suportam somente tração e compressão, sendo utilizados apenas nas direções mais solicitadas [Haftka e Gürdal, 1992].

Apesar dos resultados obtidos, a otimização só voltou ao foco de estudos na década de 60. Com o desenvolvimento dos computadores e de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, a otimização passou a ser uma área de grande interesse em projeto. Assim, começou o avanço e a implementação de algoritmos de solução de problemas, inclusive problemas não lineares bastante utilizados até hoje [Haftka e Gürdal, 1992].

O presente trabalho foi proposto de modo a elaborar uma metodologia de otimização estrutural com foco na facilidade de fabricação. As treliças planas foram escolhidas como objeto da análise, pois são comumente utilizadas para as mais variadas aplicações, mas geralmente de forma robusta, gerando desperdício de materiais e custos desnecessários.

### 1.1. Revisão Bibliográfica

A Otimização Estrutural tem sido estudada em diversos trabalhos encontrados na literatura. Croce et al., 2004, estudou a otimização de massa em estruturas metálicas treliçadas planas. Foram utilizadas restrições para limites de tensão e deslocamento. As variáveis de projeto utilizadas foram a altura, o número de nós e as áreas das seções transversais, a partir de uma lista de valores discretos de perfis comerciais.

Corso e Gomes, 2008, apresentam uma metodologia de otimização de peso de estruturas com restrição de confiabilidade. As áreas das seções transversais são utilizadas como as variáveis de projeto. É utilizado o método dos Algoritmos Genéticos com codificação real dos parâmetros e o método da Programação Quadrática Sequencial para o processo de otimização. Os resultados encontrados pelas duas técnicas são comparados entre si, chegando à conclusão de que as duas técnicas possuem resultados próximos.

Guerra, 2008, estudou a otimização estrutural da massa de treliças planas e espaciais. Utilizou em seu trabalho como variáveis de projeto as áreas das seções transversais e baseou as restrições em normas de projeto de estruturas, como a NBR8800:2008. Foi utilizado o método dos Algoritmos Genéticos, e uma lista de perfis comerciais para os valores possíveis das variáveis de projeto. Após o processo de otimização, comparou seus resultados estruturais com um programa comercial de análise estrutural.

Em sua dissertação de mestrado, Souza, 2009, apresentou uma formulação de otimização estrutural para treliças planas e espaciais. Foram utilizadas restrições de limite de tensão e deslocamento, em um método combinando técnicas de Programação Linear Sequencial (SLP) e Algoritmos Genéticos (AG). Esse método é dividido em duas etapas: a

primeira é a busca pelo melhor resultado no espaço contínuo, utilizando SLP; enquanto a segunda é a busca no espaço discreto, onde utiliza os resultados da primeira etapa como população inicial para a segunda etapa. Dessa forma, foi conseguida uma significativa melhora na convergência do processo de otimização, com redução do custo computacional. Os valores discretos utilizados para as variáveis de projeto foram baseados no manual do Instituto Americano de Construção em Aço (AISC).

Sommer, 2010, apresenta uma metodologia para otimização multiobjectivo de uma estrutura real através de Algoritmos Genéticos. Nesse trabalho, é realizada uma integração entre ferramentas de otimização e análise estrutural. Souza, 2012, estudou uma metodologia de otimização de elementos de vigas através do método da Programação Linear Sequencial. Nesse estudo, as estruturas consideradas foram vigas com restrições de limite de tensão. As variáveis de projeto utilizadas foram as áreas das seções transversais, assumidas como perfis circulares, devido à facilidade de cálculo da área e do momento de inércia. O trabalho obteve êxito nos resultados, respeitando as restrições impostas.

Kuckoski, 2013, estudou uma metodologia de otimização dimensional, topológica e de forma para a minimização da massa de estruturas de membros unidimensionais. As variáveis de projeto utilizadas foram as áreas das seções transversais das barras da estrutura. As restrições utilizadas foram baseadas em critérios de falha para tensão, flambagem e fadiga, de acordo com normas de projeto de estruturas oceânicas. Fez uso do método dos Algoritmos Genéticos, contornando o problema de singularidade de tensões, pois quando a área de um elemento tende a zero, a tensão tende ao infinito. Após validação da metodologia a partir de comparações com resultados da literatura, foi realizado o dimensionamento de uma estrutura real. Essa técnica permitiu o dimensionamento de uma estrutura ótima, com relativa facilidade de fabricação, pois as variáveis de projeto eram retiradas de uma lista de perfis comerciais.

## 1.2. Objetivos

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma metodologia de otimização paramétrica para minimizar o volume de material empregado na construção de estruturas metálicas planas de sustentação. As restrições impostas ao problema serão baseadas em confiabilidade estrutural, onde será utilizado o método de elementos finitos com formulação de elemento de barra para realização do cálculo estrutural.

Serão analisadas estruturas planas com uma forma determinada, nas quais a otimização visa minimizar o número de barras, a altura da estrutura e a área das seções transversais. A Figura 1.1 apresenta um esquema da configuração do tipo de estrutura escolhida para análise neste trabalho. A linguagem de programação utilizada para construção dos algoritmos será o programa de domínio público Scilab. A validação dos resultados estruturais será baseada em simulações numéricas com o pacote comercial ANSYS®.

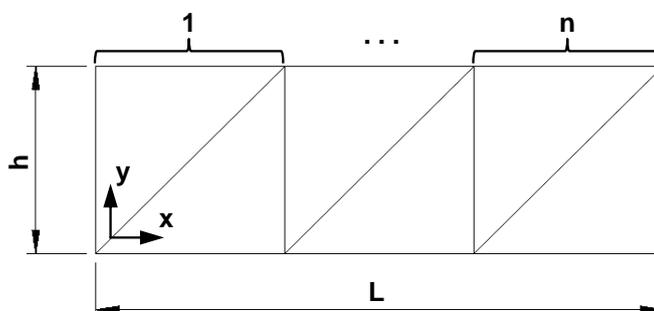


Figura 1.1 – Configuração esquemática do tipo de treliça plana estudada.

As propriedades geométricas e de material das barras serão determinadas a partir de bibliotecas específicas, desenvolvidas para os objetivos desse trabalho. É obtido um tipo de estrutura com mínimo volume que favoreça a facilidade de fabricação, a partir da utilização de

perfis comerciais, sem comprometer seu desempenho para determinado nível de confiabilidade, que é um parâmetro de entrada. A estrutura ótima obtida possui uma quantidade de barras, com áreas de seções transversais discretas e uma altura que minimizam a massa total da treliça, mas mantém o nível de confiança dentro do limite previamente determinado.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para o desenvolvimento deste trabalho serão utilizados diversos conceitos e assuntos relacionados à área de Mecânica dos Sólidos. Para as etapas de análise estrutural será utilizado o Método dos Elementos Finitos, enquanto para as restrições da otimização serão utilizados os conceitos de Confiabilidade Estrutural baseados em critérios de Tensão Crítica de Flambagem e de Tensão Limite de Escoamento do material. A otimização será realizada a partir do Método dos Algoritmos Genéticos, pois serão utilizadas variáveis de projeto discretas. Os itens que seguem apresentam o desenvolvimento desses conceitos no contexto do presente trabalho.

### 2.1. Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma poderosa ferramenta desenvolvida com a finalidade de aproximar as soluções das equações diferenciais da mecânica deformável por sistemas de equações lineares. Esse método serve de base para importantes áreas da engenharia, de forma que existem diversas literaturas abordando esse tema. O MEF, basicamente, particiona a estrutura em subdomínios mais simples, de modo que as equações diferenciais possam ser substituídas, sem grandes prejuízos na qualidade dos resultados, por sistemas de equações lineares que descrevem o comportamento estrutural do conjunto discretizado.

Em modelos adequadamente configurados, o campo de deslocamentos da estrutura discretizada pode ser encontrado com erros que, normalmente, podem ser estimados. Além disso, o MEF estabelece uma analogia direta entre o sistema físico real e o modelo. Assim, o MEF é seguramente o processo de discretização de meios contínuos mais utilizado, sendo aplicado na solução de outros fenômenos físicos em mecânica dos fluidos, eletromagnetismo e transferência de calor, entre outros [Selke et al., 2002].

#### 2.1.1. Elemento de Barra

O tipo de elemento finito utilizado na formulação deste trabalho foi o elemento de barra. A utilização das equações mais simples, provenientes desta escolha, é possível pelo fato de que o objeto em estudo é considerado uma treliça. Como as treliças são membros estruturais que suportam apenas tração e compressão, ou seja, esforços unidimensionais, sua formulação matemática se torna simples e de fácil utilização.

Este item apresenta as equações básicas desse tipo de elemento. Não se têm como objetivo apresentar o desenvolvimento matemático, mas apenas ressaltar as principais equações utilizadas na solução desse problema. Esse item foi elaborado segundo o apresentado em Selke et al., 2002 e em Logan, 1992.

A tensão axial em um elemento unidimensional pode ser calculada de acordo com a Equação (2.1).

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (2.1)$$

Onde  $\sigma_{xx}$  é a tensão normal à seção transversal do elemento,  $E$  é o módulo de elasticidade linear e  $\varepsilon_{xx}$  é a deformação axial.

A deformação axial pode ser definida a partir da Equação (2.2).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x(x)}{dx} \quad (2.2)$$

Onde  $u_x(x)$  é o deslocamento axial ao longo do elemento.

Considerando que  $\varepsilon_{xx}$  é constante ao longo do elemento, a Equação (2.2) pode ser reescrita na Equação (2.3).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.3)$$

Onde  $L$  é o comprimento inicial do elemento e  $\Delta L$  é a variação do comprimento do elemento, devido à ação das forças nodais.

Assim, a equação do elemento de barra escrita na forma da equação fundamental de elementos finitos, forma matricial, considerando um sistema de coordenadas x-y global, de acordo com a Figura 1.1, é dada pela Equação (2.4).

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta.\text{sen}\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta.\text{sen}\theta \\ \cos\theta.\text{sen}\theta & \text{sen}^2\theta & -\cos\theta.\text{sen}\theta & \text{sen}^2\theta \\ \cos^2\theta & -\cos\theta.\text{sen}\theta & \cos^2\theta & \cos\theta.\text{sen}\theta \\ -\cos\theta.\text{sen}\theta & \text{sen}^2\theta & \cos\theta.\text{sen}\theta & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Onde  $A$  é a área da seção transversal do elemento,  $\theta$  é o ângulo de inclinação do elemento com relação ao eixo x,  $u$  é o deslocamento nodal nas direções x-y e  $F$  é a força nodal nas direções x-y.

## 2.2. Flambagem de Euler

Um comportamento importante de ser estudado nas estruturas tipo treliça e pórtico é dado pela instabilidade do sistema, que pode gerar falha de seus elementos submetidos a esforços compressivos. A preocupação de dimensionar uma estrutura para resistência à tensão limite de escoamento não é suficiente, pois só avalia a resistência à tração, mesmo existindo modos de falha por compressão para valores de tensão menores que a tensão de escoamento. Esse tipo de falha é denominado flambagem, que pode ser local ou global.

Para o desenvolvimento deste trabalho foram utilizados os conceitos de flambagem de Euler a partir da Teoria Clássica de Euler. O critério utilizado nesse trabalho consiste em analisar cada membro da estrutura, sem avaliações locais do perfil ou globais da estrutura. Nesse item são apresentadas as principais equações utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho, sem o objetivo de desenvolver ou demonstrar matematicamente o problema.

O equacionamento deste tópico é referenciado de acordo com Popov, 1978. A partir da análise do deslocamento de uma coluna submetida à compressão, pode ser apresentada a Carga de Flambagem de Euler de acordo com a Equação (2.5).

$$P_{cr} = EI \left( \frac{n\pi}{L_e} \right)^2 \quad (2.5)$$

Onde,  $P_{cr}$  é a carga crítica de flambagem de Euler,  $n$  é o modo de flambagem,  $I$  é o momento de inércia de área do elemento e  $L_e$  é o comprimento efetivo do elemento, que depende da vinculação das estruturas.

O momento de inércia pode ser definido de acordo com a Equação (2.6).

$$I = A r^2 \quad (2.6)$$

Onde,  $r$  é o raio de giração do perfil.

Pode, ainda, ser definido o índice de esbeltez do elemento a partir da Equação (2.7).

$$\lambda = \frac{L_e}{r} \quad (2.7)$$

Onde,  $\lambda$  é o índice de esbelteza do elemento submetido à compressão.

A partir das Equações (2.5), (2.6) e (2.7), analisando o primeiro modo de flambagem ( $n=1$ ) e dividindo a Equação (2.5) pela área da seção transversal do elemento compressivo em análise, chega-se a Equação (2.8), que representa a tensão crítica de flambagem pelo Método de Euler.

$$\sigma_{cr\_Euler} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{EI}{A} \left( \frac{\pi}{L_e} \right)^2 = E\pi^2 \frac{r^2}{L_e^2} = \frac{E\pi^2}{\left( \frac{L_e}{r} \right)^2} = \frac{E\pi^2}{\lambda^2} \quad (2.8)$$

Onde,  $\sigma_{cr\_Euler}$  é a tensão crítica de flambagem de Euler.

O critério de Euler não tem previsão de falha por escoamento para estruturas curtas, apenas define limites de flambagem de Euler para estruturas longas. Assim, de acordo com Popov, 1978, foi realizada uma interpolação linear a partir do valor de tensão crítica de flambagem, para um determinado valor do índice de esbelteza ( $\lambda_{lim} = 120$ ), até a tensão de escoamento do material, para  $\lambda = 0$ . A Equação (2.9) apresenta a equação da reta que realiza essa interpolação.

$$\sigma_{cr} = \frac{\lambda}{\lambda_{lim}} (\sigma_{cr\_Euler} - \sigma_{esc}) + \sigma_{esc} \quad (2.9)$$

Onde,  $\lambda_{lim}$  é o valor limite do índice de esbelteza do elemento para flambagem por Euler e  $\sigma_{esc}$  é tensão de escoamento do material.

A Figura 2.1 apresenta os gráficos de flambagem, onde pode ser percebida a diferença entre a equação de Euler e a interpolação linear utilizada. De acordo com a Figura 2.1, percebe-se que quando o comprimento equivalente tende a zero, a tensão crítica de flambagem do critério de Euler tende ao infinito. Assim, faz-se necessário limitar o crescimento dessa função, o que é realizado através da interpolação linear, considerando, ainda, a tensão limite de escoamento do material.

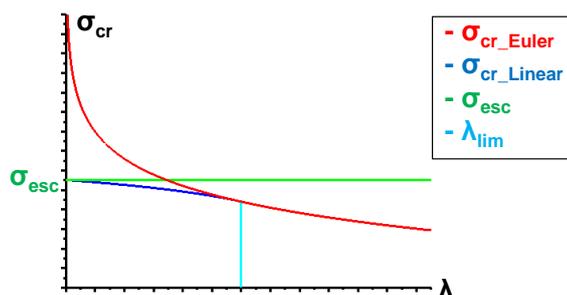


Figura 2.1 – Gráfico das curvas do Critério de Flambagem local.

### 2.3. Confiabilidade Estrutural

A probabilidade de falha de uma estrutura determina o nível de confiança do sistema mecânico, ou seja, a sua confiabilidade. Assim, pode ser definida a confiabilidade estrutural com sendo a probabilidade de que não ocorram falhas. Esses conceitos são baseados no fato de que os membros estruturais, a resistência dos materiais e até mesmo os carregamentos podem ser tratados como variáveis aleatórias, pois possuem características com comportamentos que variam indefinidamente ao acaso.

Na Figura 2.2 pode ser percebido esse comportamento, onde a solicitação e a resistência da estrutura são representadas por curvas Gaussianas. Essa figura representa uma

estrutura com determinada solicitação, mas duas possibilidades de resistência, por exemplo, dois materiais alternativos com mesma variabilidade e resistência média diferente. A área abaixo da intersecção de cada curva de resistência com a curva de solicitação é a representação da probabilidade de falha da estrutura para cada material.



Figura 2.2 – Gráfico das Distribuições Gaussianas da Resistência e Solicitação de uma estrutura, tratadas como variáveis aleatórias. Adaptado de ControlDesign, 2014

Dessa forma, nesse trabalho serão utilizados os conceitos de confiabilidade estrutural, para avaliar as restrições do problema de minimização da massa da estrutura. Existem diversos métodos de cálculo da confiabilidade de um sistema. Será utilizado o Método de Monte Carlo, pois diversos autores estudaram diferentes métodos e todos apontam para a maior exatidão do Método de Monte Carlo, o que é concluído por Lopes, 2009.

### 2.3.1. Método de Monte Carlo

O Método de Monte Carlo consiste em selecionar variáveis aleatórias e critérios de falha para a estrutura em análise. A ideia básica da técnica é varrer valores aleatórios dessas variáveis e avaliar o critério de falha para cada um desses valores. Sempre que o critério é violado, soma-se um ponto de falha. Quando o valor final do número de simulações é alcançado, tem-se a quantidade de falhas correspondente.

Assim, este item aborda o equacionamento utilizado para o cálculo da confiabilidade da estrutura analisada. Esse tópico foi baseado em Ditlevsen e Madsen, 2007 e Melchers, 1987.

Numericamente, a probabilidade de falha de um sistema pode ser definida em função do número de falhas e do número de simulações realizadas. A Equação (2.10) apresenta essa relação.

$$P_f = \frac{n_f}{n_s} \quad (2.10)$$

Onde,  $P_f$  é a probabilidade de falha da estrutura,  $n_f$  é o número de falhas que ocorreram durante as simulações e  $n_s$  é o número total de simulações realizadas.

Assim, a confiabilidade pode ser calculada pela Equação (2.11).

$$R = (1 - P_f) \cdot 100 \quad (2.11)$$

Onde,  $R$  é confiabilidade do sistema ou estrutura em análise.

## 2.4. Otimização Estrutural

A otimização estrutural é a área de estudo da mecânica deformável que trata dos problemas de maximização ou minimização de determinadas características de montagens estruturais. O problema de encontrar o mínimo ou o máximo global de uma função pode ser avaliado de diversas formas, dependendo do grau de complexidade requerido para as equações utilizadas. Seguem apresentadas as principais definições dessa área de estudo.

Variável de Projeto é o parâmetro da estrutura que se deseja utilizar como variável para a otimização, ou seja, é o parâmetro que pode ser alterado de acordo com o objetivo da otimização. As variáveis de projeto podem ser classificadas de três formas: Contínua, que pode ser representada por uma função contínua no domínio; Discreta, que não pode ser representada por uma função contínua no domínio; Contínua tratada como discreta.

Função Objetivo é a expressão matemática que quantifica os parâmetros a serem otimizados. Essa expressão é função das variáveis de projeto. Assim, pode ser considerada uma medida da eficiência do sistema, pois é o parâmetro de comparação entre diferentes combinações das variáveis de projeto.

Restrição é a limitação de valores imposta ao sistema para obter uma solução otimizada. A restrição deve ser corretamente definida, pois afeta diretamente a complexidade do problema.

Assim, pode ser definida a notação de otimização estrutural mais comumente utilizada. A Equação (2.12) apresenta essa notação.

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimizar}} f(x) \\ & \text{tal que } h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, n_k \\ & \quad \quad g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dentre os diversos métodos de solução de problemas de otimização estrutural disponíveis, para o desenvolvimento desse trabalho foi utilizado o Método dos Algoritmos Genéticos. Isso foi devido ao tratamento das variáveis de projeto, pois os parâmetros escolhidos, para a minimização da massa das estruturas em cálculo, são discretos. Dessa forma, os métodos analíticos de otimização não são possíveis, devido à inexistência de derivadas da função objetivo.

### 2.4.1. Método dos Algoritmos Genéticos

O método dos Algoritmos Genéticos é baseado na Teoria da Evolução de Darwin, sendo caracterizado como um método de solução probabilístico. Segundo essa Teoria da Seleção Natural, os indivíduos com maior aptidão em determinado habitat irão perpetuar a espécie, passando suas características positivas para as gerações futuras. Ao longo do tempo, esses indivíduos tendem a perder as características negativas e manter apenas as características adaptadas ao meio.

Essa técnica é interessante devido à sua facilidade de implementação numérica e alta robustez. Os AG's não necessitam de informações do gradiente do problema analisado e são menos suscetíveis a condições de mínimos locais, conforme [Goldberg, 1989 apud Kuckoski, 2013]. Segue a apresentação de algumas terminologias importantes desse método:

- Gene: corresponde a cada variável de projeto do problema proposto;
- Cromossomo ou Indivíduo: é a combinação de variáveis de projeto (genes) que definem um ponto do espaço de solução no domínio;
- Alelo: cada alelo representa o domínio de valores possíveis para o respectivo gene;
- População: é o conjunto de indivíduos selecionados para cada etapa de avaliação da função aptidão.
- Geração: é o número de iterações utilizado no método. Representam o número de evoluções das populações ao longo do tempo.

Seguem algumas definições de parâmetros genéticos importantes, baseadas em Goldberg, 1989:

- Tamanho da População: corresponde à quantidade de indivíduos em cada iteração. Populações pequenas podem comprometer o desempenho do algoritmo, enquanto populações grandes podem ocasionar um alto custo computacional;
- Taxa de Cruzamento: é a taxa de inserção de novos genes nos indivíduos da população. Se for muito elevada pode ocasionar perda de boas características de aptidão;
- Taxa de Mutação: é a taxa de adição aleatória de novos indivíduos e genes nas populações futuras, garantindo assim que não exista possibilidade nula de obter um ponto qualquer do domínio, assim como o ótimo global;
- Intervalo de Geração: é o percentual de indivíduos que deve ser substituído na geração seguinte. Valores altos desse intervalo pode provocar a perda de indivíduos com boas características, enquanto valores baixos tornam a convergência do algoritmo lenta.

Nesse método, é preciso apenas o valor da função objetivo, de modo que é necessário criar uma função aptidão. Essa função aptidão é caracterizada pela inclusão das restrições, diretamente, na função objetivo. Dentre as técnicas conhecidas, foi escolhida a de penalização, que consiste em somar uma penalidade na função aptidão sempre que uma restrição é violada. A Equação representa a função aptidão.

$$f_{apt}(x) = f_{obj}(x) + P \cdot \left( \sum_{i=1}^n \delta_i \right) \quad (2.13)$$

Onde,  $f_{apt}(x)$  é a função aptidão,  $f_{obj}(x)$  é a função objetivo,  $P$  é o coeficiente de penalização,  $\delta_i$  assume valor 0 se a restrição não é violada,  $\delta_i$  assume valor 1 se a restrição é violada, e  $n$  é o número de restrições do problema. Usou-se a escolha da penalidade segundo o estudo de Kuckoski, 2013.

### 3. METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste trabalho serão utilizados diversos conceitos e assuntos relacionados à área de Mecânica dos Sólidos. Para as etapas de análise estrutural será utilizado o Método dos Elementos Finitos, com formulação para elemento de barra, já que as estruturas são consideradas treliças. Essa escolha foi realizada de forma a simplificar os cálculos, já que se considera que as barras da estrutura não transmitem momentos, tendo apenas dois graus de liberdade por nó. A validação desse algoritmo é realizada através de comparação com o pacote comercial ANSYS®, apresentada no Apêndice A.

Para as restrições do problema de otimização serão utilizados os conceitos de Confiabilidade Estrutural. Para tanto, será feito uso da aplicação do método de Monte Carlo. Nesse método, o cálculo da confiabilidade necessita ser baseado em critérios falha. Assim, os critérios escolhidos para essa análise são a Tensão Limite de Escoamento do material e a Tensão Crítica de Flambagem de Euler. Aqui, é necessário, também, definir as variáveis aleatórias do problema. Poderiam ter sido definidas muitas variáveis aleatórias, como por exemplo, a área de seção transversal, o comprimento das barras, os carregamentos, entre outras. No entanto, para o teste da metodologia, usou-se apenas a tensão de escoamento.

A otimização será realizada a partir do Método dos Algoritmos Genéticos, pois serão avaliadas variáveis de projeto discretas, de acordo com uma biblioteca de 32 perfis estruturais escolhidos para o desenvolvimento do trabalho. Assim, foi utilizada a ferramenta de AG's disponível na biblioteca do próprio Scilab no algoritmo de solução. A Figura 3.1 apresenta o fluxograma do algoritmo implementado para o desenvolvimento dessa metodologia de otimização paramétrica.

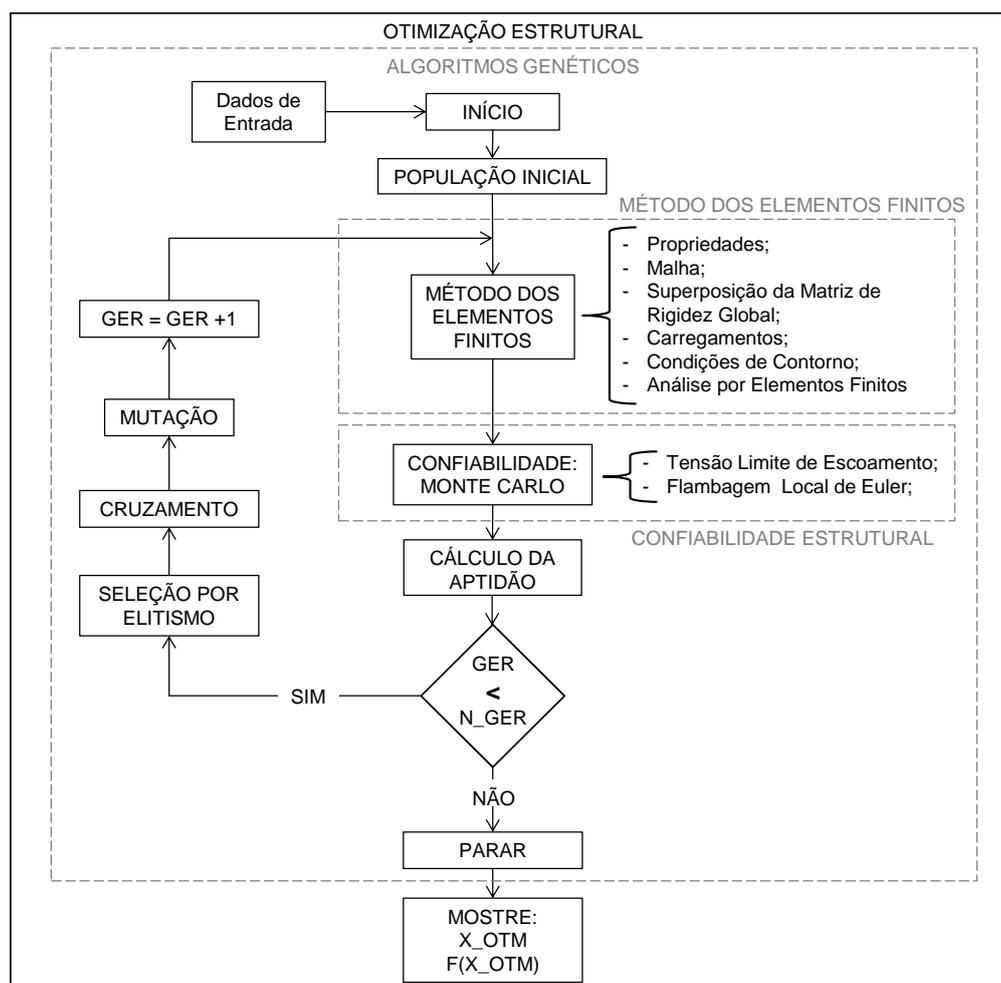


Figura 3.1 – Fluxograma do Algoritmo desenvolvido.

#### 4. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Esse trabalho foi dividido em 2 casos diferentes, que aqui serão descritos individualmente. O caso 1 é o teste principal da metodologia desse trabalho, trata-se da aplicação da metodologia desenvolvida até aqui. O caso 2 é uma validação da metodologia, pois trata da otimização de uma treliça de 10 barras, comparando os resultados obtidos com resultados encontrados na literatura. Para o cálculo de confiabilidade estrutural, a variabilidade de resistência dos materiais foi considerada a partir de um coeficiente de variação de 20% para o limite de resistência ao escoamento, com relação ao valor médio. Segundo Shigley e Mishke, 2005, o coeficiente de variação dos aços baixo carbono encontra-se em torno de 4% a 5%.

Aqui foi utilizado o valor de 20%, pois não se está considerando variabilidade dimensional, logo é utilizado um coeficiente de segurança implícito.

##### 4.1. Caso 1

Esse caso é o teste principal da metodologia desse trabalho. É caracterizado pela otimização da treliça mostrada na Figura 4.1. As variáveis de projeto utilizadas foram os conjuntos de áreas das seções transversais 1, 2 e 3, a altura da estrutura e o número de divisões da estrutura, representadas por A1, A2, A3, h e n respectivamente. Foi utilizada uma condição de carregamento estático, com aplicação de forças apenas na direção vertical. As vinculações impostas foram de engaste nos dois nós de cada extremidade. O conjunto de

áreas 1 é composto pelas áreas das barras horizontais, o conjunto 2 pelas áreas das barras verticais e o conjunto 3 pelas áreas das barras inclinadas, como visto na Figura 4.1.

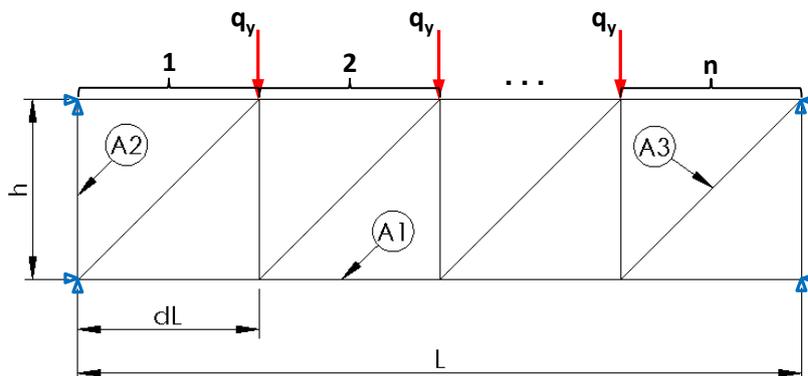


Figura 4.1 – Esquema da treliça a ser otimizada.

A carga  $q_y$  representada na Figura 4.1 é determinada em função do número de nós intermediários, conseqüentemente função do número de divisões  $n$  da estrutura, pois o valor de  $n$  é variável. É definida uma força total  $F_t$  que atua na estrutura, sendo a carga  $q_y$  a distribuição uniforme dessa força nos nós da treliça. A Equação (4.1) apresenta a relação entre a força total e a carga distribuída.

$$q_y = \frac{F_t}{(n - 1)} \quad (4.1)$$

A partir da Figura 4.1 pode ser definida a equação da massa total da estrutura em função das variáveis de projeto. A Equação (4.2) apresenta essa função.

$$M(A_1, A_2, A_3, h, n) = \rho \cdot (2 \cdot L \cdot A_1 + (n + 1) \cdot h \cdot A_2 + (\sqrt{L^2 + n^2 \cdot h^2}) \cdot A_3) \quad (4.2)$$

Onde,  $\rho$  é a densidade do material.

Com a função objetivo definida, é possível apresentar o problema de otimização em sua notação típica, de acordo com a Equação (4.3).

$$\begin{aligned} & \underset{A_1, A_2, A_3, h, n}{\text{minimizar}} && M(A_1, A_2, A_3, h, n) \\ & \text{tal que} && \text{Conf} \geq \text{Conf}_R \\ & && \text{Conf} = f(S_{esc}, S_{flamb}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Como o AG exige a formulação do problema com uma única função de avaliação, sem restrições, é definida a função aptidão desse problema, de acordo com a Equação (4.4).

$$\text{Apt}(M, P, \delta) = M(A_1, A_2, A_3, h, n) + P \cdot \delta \quad (4.4)$$

Onde,  $\text{Apt}(M, P, \delta)$  é a função aptidão do problema de otimização,  $P$  é o coeficiente de penalização e  $\delta$  é o parâmetro que testa a restrição de confiabilidade, de acordo com a Equação (4.5).

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \delta = 0 & \text{Conf} \geq \text{Conf}_R \\ \delta = 1 & \text{Conf} < \text{Conf}_R \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

Nesse caso, os principais dados de entrada são o comprimento total ( $L$ ) da estrutura, a força total ( $F_t$ ) aplicada, o número de simulações ( $n_s$ ) para o método de Monte Carlo, a Tensão

de escoamento média ( $S_{med}$ ) e o seu desvio padrão (DS) para o material, o coeficiente de penalização (P) da função objetivo e a confiabilidade requerida ( $Conf_R$ ) para a estrutura. Há ainda a definição dos valores dos parâmetros genéticos utilizados, tais como o tamanho da população ( $T_{am\_Pop}$ ), a taxa de cruzamento ( $T_{x\_Cr}$ ), a taxa de mutação ( $T_{x\_Mut}$ ), o número de gerações ( $N_{Ger}$ ) e o intervalo de gerações ( $I_{interv\_Mut}$ ). Os valores utilizados estão apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Valores dos parâmetros utilizados para o caso 1.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
L [mm]	10000	DS [MPa]	50	Tx_Cr	0,4
Ft [N]	-15000	Conf_R	99,9	Tx_Mut	0,1
ns	1E+06	P	1E+10	N_Ger	100
Smed [MPa]	250	Tam_Pop	20	Interv_Mut	10

O Apêndice B apresenta uma tabela com os valores de cada uma das variáveis de projeto utilizadas nessa metodologia. A área e o momento de inércia dos perfis foram retirados de um catálogo da Gerdau. A altura e o número de divisões foram determinados para melhorar a facilidade de fabricação.

#### 4.2. Caso 2

Esse caso foi elaborado de forma a comparar a metodologia desenvolvida nesse trabalho com resultados encontrados na literatura. O trabalho utilizado como comparação foi a treliça de 10 barras otimizada por Kuckoski, 2013. As variáveis de projeto utilizadas nesse caso foram as áreas das barras, visando a minimização de massa. Os resultados de áreas obtidos nos modelos de Kuckoski foram avaliados pelas metodologias de confiabilidade e de otimização desenvolvidas nesse trabalho. A Figura 4.2 apresenta o problema da treliça de 10 barras.

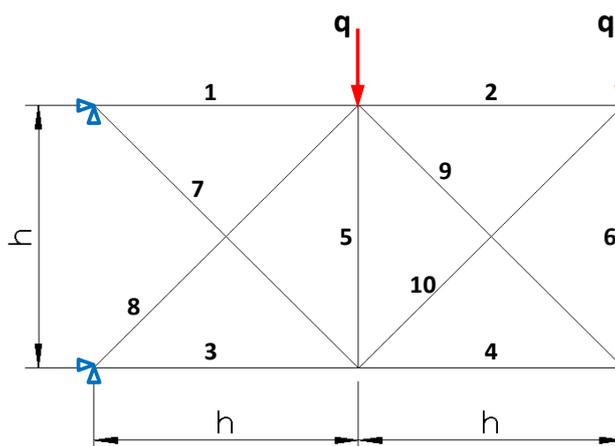


Figura 4.2 – Treliça de 10 barras.

Foram adotados os mesmos parâmetros utilizados por Kuckoski, 2013: módulo de elasticidade ( $E=1E4$ ),  $h=360$ , densidade ( $p=0,1$ ),  $q=100$  e tensão admissível ( $\sigma_{adm}=20$ ). Como nessa metodologia é necessária a utilização da tensão de escoamento ( $\sigma_{esc}$ ), ao invés de tensão admissível, foi adotado um valor para o coeficiente de segurança ( $N_{seg}=2$ ), o que implica em uma  $\sigma_{esc}=40$ , e um desvio padrão ( $\delta_{esc}=0,2 \sigma_{esc} = 8$ ).

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesse capítulo são apresentados e discutidos os resultados encontrados nos casos descritos no item anterior. Visando a validação da metodologia, foram elaboradas algumas curvas de análise da convergência. A Figura 5.1 apresenta duas curvas de convergência.

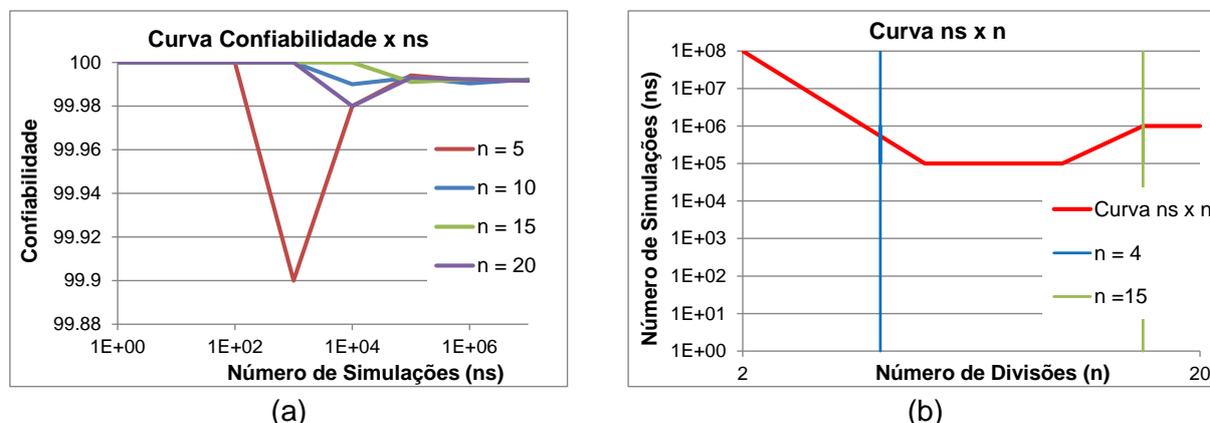


Figura 5.1 – Curvas de Convergência.

Na Figura 5.1 (a), estão apresentadas as curvas de convergência da confiabilidade em função do número de simulações para diferentes valores da variável  $n$ . Já na Figura 5.1 (b), é apresentada a curva da quantidade de simulações necessárias para alcançar a convergência da confiabilidade em função de  $n$ . Pode ser percebido que para valores de  $n$  entre 4 e 15, há, relativamente, boa convergência para as curvas, sendo que um número de simulações de  $10^6$  é relativamente suficiente para convergir a confiabilidade.

É utilizada uma saída gráfica, que utiliza gradientes de cores para expressar os diferentes níveis de tensão normal de cada componente. É realizada, também, uma ponderação das áreas na espessura das linhas que representam cada membro, de forma que as áreas maiores são representadas por linhas mais espessas.

O computador utilizado para os cálculos foi um Notebook, Dell Inspiron N4050, com processador Intel® Core™ i3-2350M CPU @2,30GHz, memória RAM de 8GB, sistema operacional Windows 7 Home Basic 64 bits. No entanto, o Scilab utiliza apenas um núcleo de processamento.

### 5.1. Caso 1

Para as especificações do caso 1 apresentadas na Tabela 4.1, foram encontrados resultados para a situação ótima da treliça. Os valores das variáveis de projeto, da massa total da estrutura, do índice de confiabilidade e o tempo computacional encontram-se na Tabela 5.1. A estrutura ótima não possui violação de restrições, logo a função objetivo e a função aptidão possuem o mesmo valor no ponto ótimo.

Tabela 5.1 – Resultados para o Caso 1.

Variável Projeto	A1 [mm <sup>2</sup> ]	A2 [mm <sup>2</sup> ]	A3 [mm <sup>2</sup> ]	h [mm]	n
Valor Encontrado	342	111	154	460	18
<b>Confiabilidade</b>				99,907	
<b>Massa Total [kg]</b>				75,091	
<b>Tempo Total [h]</b>				11,467	

A Figura 5.2 apresenta a estrutura otimizada para esse caso. Ela é apresentada na sua configuração deformada calculada de acordo com a análise por elementos finitos. No Apêndice C é apresentada a curva de convergência desse caso.

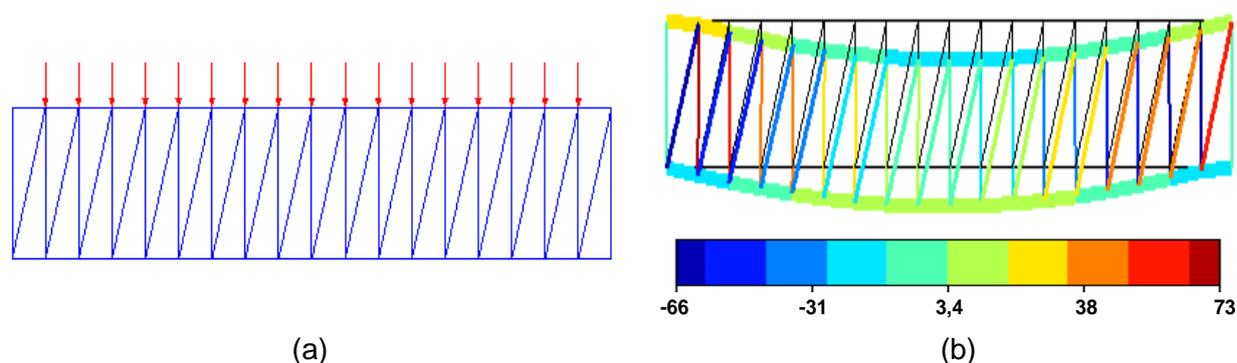


Figura 5.2 – Estrutura otimizada, onde (a) carregamento e (b) resultados de tensão. A escala horizontal está reduzida.

## 5.2. Caso 2

No estudo de Kuckoski, 2013, as variáveis de projeto eram as áreas das seções transversais de cada uma das barras da treliça. Como esse caso deve ser comparado, foram mantidas essas variáveis de projeto. Inicialmente, os resultados obtidos por Kuckoski, 2013, foram analisados pelas formulações de elementos finitos e confiabilidade da presente metodologia. O método utilizado por Kuckoski, 2013, era baseado em tensão admissível, logo, com utilização de um coeficiente de segurança. Dessa forma, na análise de confiabilidade realizada nesse trabalho, os resultados obtidos por Kuckoski, 2013, não apresentaram alta confiabilidade, provavelmente devido ao coeficiente de segurança estimado ter sido baixo demais.

As tensões máximas obtidas são iguais a tensão admissível adotada, o que na análise estatística, com um coeficiente de segurança de 2, não é suficiente para evitar que haja probabilidade de falha, implicando uma confiabilidade baixa. O Apêndice D apresenta uma tabela comparativa entre os resultados obtidos por Kuckoski, 2013, e os obtidos pela metodologia do presente trabalho com o respectivo valor de confiabilidade de cada caso. E o Apêndice E apresenta as configurações de cada uma dessas estruturas.

A Figura 5.3 apresenta os resultados estruturais da treliça de 10 barras otimizada pela presente metodologia. O Apêndice C apresenta, ainda, a curva de convergência para esse caso. A convergência desse caso levou, aproximadamente, 26 horas, para um total de 2000 iterações.

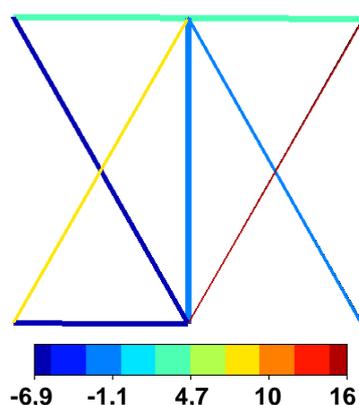


Figura 5.3 – Configuração da treliça de 10 barras otimizada, com os resultados estruturais.

## 6. CONCLUSÕES

Pelos resultados apresentados conclui-se que a metodologia desenvolvida nesse trabalho atingiu os objetivos propostos. Conseguiu-se a otimização de massa da treliça plana analisada e obtiveram-se bons resultados no modelo de comparação. Essa metodologia apresenta significativas vantagens frente aos métodos tradicionais, visto que permite análises estocásticas de estruturas, garantindo a confiabilidade do sistema.

Conclui-se que a otimização estrutural baseada em confiabilidade é mais conservadora do que os critérios de falha tradicionais. A metodologia desenvolvida, quando comparada a casos da literatura, apresenta uma massa maior, no entanto uma confiabilidade superior. Assim, a massa total da estrutura otimizada pela presente técnica é cerca de 9% superior aquela encontrada por Kuckoski, 2013, representando um valor pouco significativo frente à vantagem do método empregado.

Observa-se, ainda, que o nível das tensões em cada elemento da estrutura otimizada pela presente metodologia é menor do que os resultados obtidos por Kuckoski. Dessa forma, é obtida uma estrutura de massa, aproximadamente, 9% superior, mas com uma solicitação menor e uma confiabilidade de 99,9%, assegurada por um método estocástico de análise estrutural. A massa maior pode ser um efeito ocasionado pelo tratamento discreto das áreas. Esse tratamento é importante devido à facilidade de fabricação almejada, pois não requer a construção de um perfil estrutural, apenas a utilização de um perfil comercial.

As estruturas otimizadas por esse método não atendem normas de projeto, mas, ao invés disso, trabalham com a possibilidade de falha de uma estrutura. Esse tipo de tratamento é uma tendência esperada para os problemas estruturais, pois tratam da probabilidade de falha e da confiabilidade. Dessa forma, esses resultados oferecem um maior grau de confiança nos cálculos realizados.

### 6.1. Sugestões para Trabalhos Futuros

A partir do desenvolvimento dessa metodologia, podem ser mencionados os pontos de dificuldade dos métodos aqui utilizados, de forma a sugerir direções para o aprimoramento das técnicas em trabalhos futuros. O primeiro ponto a ser melhorado, pode ser o cálculo da Confiabilidade. O Método de Monte Carlo, apesar da facilidade de implementação e grande robustez, apresenta um alto custo computacional. Assim, uma melhoria importante para o desempenho dessa metodologia seria a programação de uma técnica de maior velocidade, como por exemplo o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem, FORM – *First Order Reliability Method* – ou o de Segunda Ordem, SORM – *Second Order Reliability Method*.

Aqui, por simplicidade, manteve-se apenas uma variável aleatória para a confiabilidade estrutural, a tensão limite de resistência ao escoamento. Assim, em uma continuação da técnica, seria interessante aumentar o número de variáveis aleatórias, de modo a incluir, pelo menos, a variabilidade dimensional dos perfis.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Corso, L. L.; Gomes, H. M.; “**Otimização baseada em Confiabilidade para a Minimização do Peso de Treliças**”, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Mecánica Computacional vol XXVII, 10 a 13 Novembro de 2008, páginas 2515 – 2529.

Croce, S. E.; Ferreira, G. E.; Lemonge, C. C. A.; Fonseca, G. L.; Barbosa, C. J. H.; “**A Genetic Algorithm for Structural Optimization of Steel Truss Roofs**”, XXV Cilance, 25<sup>th</sup>, UFPE, Recife, PE, Brasil, 2004.

Ditlevsen, O., Madsen, H. O.; **“Structural Reliability Methods”**, Department of Mechanical Engineering, Technical University of Denmark, 2007.

Gerra, C.; **“Otimização Paramétrica de Estruturas Treliçadas por Algoritmos Genéticos”**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, 2008.

Haftka, R., Gürdal, Z.; **“Elements of Structural Optimization”**, Kluwer Academic Publishers, 1991.

ControlDesign, 2014; <http://www.controldesign.com/articles/2004/194>, acessado em 22 de maio de 2014, às 19 horas.

Kuckoski, Adriano; **“Otimização Dimensional, Topológica e de Forma de Estruturas Unidimensionais com Restrição de Critério de Falha”**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, 2013.

Logan, D. L.; **“A First Course in the Finite Element Method”**, PWS-KENT, 2<sup>nd</sup> edition, 1992.

Lopes, P. A. M.; **“Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados, Baseada em Confiabilidade, Utilizando Algoritmos Genéticos e Redes Neurais Artificiais”**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, 2009.

Melchers, R. R.; **“Structural Reliability: Analysis and Prediction”**, Ellis Horwood Series in Civil Engineering, 1987.

Popov, E. P.; **“Introdução à Mecânica dos Sólidos”**, Edgard Blücher LTDA., 1978.

Selke, C. A. C., Pereira, L. T. V., Fonseca, J. S. O., Marczak, R. J., Alves, D. B., Luersen, M. A.; **“Apostila de Elementos Finitos utilizada na disciplina de Análise Estrutural Avançada”**, UFRGS, 2002.

Shigley, J.E; Mishke, C.R.; **“Projeto de Engenharia Mecânica”**, Bookman, 7<sup>a</sup> edição, 2005.

Sommer, R. C.; **“Otimização de Estruturas por Algoritmos Genéticos Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Flambagem”**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, 2010.

Souza, T. N.; **“Otimização de Pórticos com Programação Linear Sequencial”**, Trabalho de Diplomação em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, UFRGS, 2012.

Souza, R. P.; **“Otimização de Treliças com Restrição de Falha Combinando Técnicas de Programação de Algoritmos Contínuos e Discretos”**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, 2009.

Tabela de bolso: catálogo de barras e perfis. Disponível na página da Gerdau: [https://www.comercialgerdau.com.br/produtos/download/19\\_Barras\\_e\\_Perfis\\_manual\\_de\\_bolso.pdf](https://www.comercialgerdau.com.br/produtos/download/19_Barras_e_Perfis_manual_de_bolso.pdf), acessada em 24 de maio de 2014, às 21 horas.

## APÊNDICE A – Validação do Método dos Elementos Finitos.

Para este estudo foi desenvolvido um código dedicado para o tipo de análise desejada, pelo Método dos Elementos Finitos. Para verificar a coerência do algoritmo criado, foi utilizado o pacote comercial ANSYS Multiphysics®, com o tipo de elemento LINK180, que apresenta equações de barra. Utilizando esse programa e o algoritmo criado, foi definida e calculada uma estrutura por esses dois meios de simulação. A Tabela A.1 apresenta os parâmetros para a estrutura utilizada na validação do código desenvolvido. Os resultados obtidos para cada método de análise são apresentados na Tabela A.2.

Tabela A.1 – Parâmetros de entrada dos modelos numéricos desenvolvidos para validação.

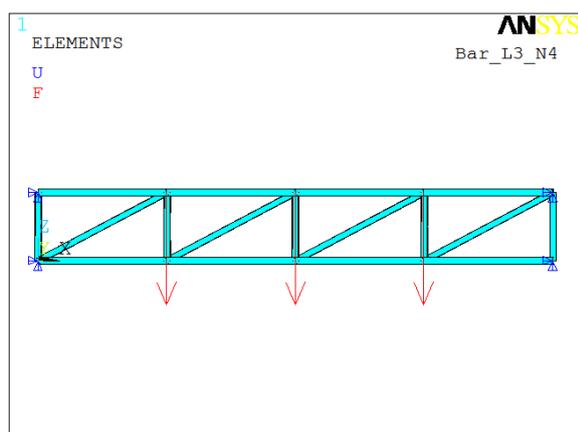
Parâmetro	Valor
Comprimento -L [mm]	3000
Altura - h [mm]	400
Número de Divisões - n	4
Força Total - F [N]	-15000
Área 1 [mm <sup>2</sup> ]	522
Área 2 [mm <sup>2</sup> ]	432
Área 3 [mm <sup>2</sup> ]	402
Módulo de Elasticidade [MPa]	1,20E+05

Tabela A.2 – Resultados obtidos para cada modelo numérico de validação.

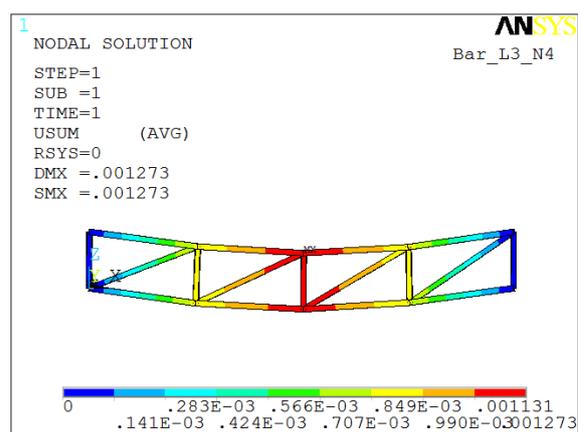
Nó	Modelo de ANSYS®		Código Desenvolvido		Erro [%]	
	Deslocamento Nodal [mm]					
	X	Y	X	Y	X [%]	Y [%]
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
2	0,026	-0,891	0,026	-0,891	0,00	0,00
3	0,109	-1,246	0,109	-1,246	0,00	0,00
4	0,138	-0,849	0,138	-0,849	0,00	0,00
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
7	0,143	-0,871	0,143	-0,871	0,00	0,00
8	0,116	-1,265	0,116	-1,265	0,00	0,00
9	0,031	-0,906	0,031	-0,906	0,00	0,00
10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
Elemento	Tensão [Mpa]				Erro [%]	
1	4,08		4,08		0,00	
2	13,33		13,33		0,00	
3	4,63		4,63		0,00	
4	-22,04		-22,04		0,00	
5	22,86		22,86		0,00	
6	-4,35		-4,35		0,00	

7	-13,61		-13,61		0,00
8	-4,90		-4,90		0,00
9	0,00		0,00		0,00
10	5,96		5,96		0,00
11	-5,61		-5,61		0,00
12	-17,19		-17,19		0,00
13	0,00		0,00		0,00
14	-40,05		-40,05		0,00
15	-13,62		-13,62		0,00
16	12,81		12,81		0,00
17	39,24		39,24		0,00

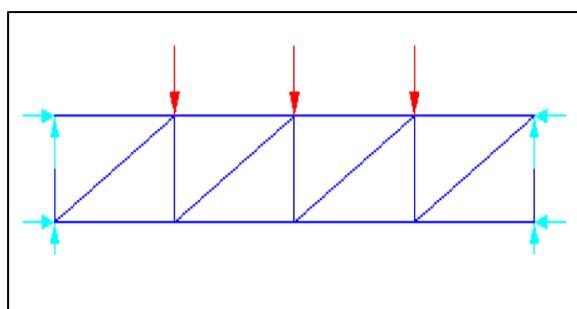
A partir da Tabela A.2, pode ser percebido que o código desenvolvido apresenta resultados idênticos aos encontrados no modelo analisado no ANSYS® para o deslocamento nodal. A Figura A.1 apresenta (a) a configuração da estrutura simulada no programa ANSYS® e (b) os contornos dos resultados de deslocamento nodal na estrutura, (c) a configuração da estrutura simulada pelo presente método de elementos finitos e (d) os contornos dos resultados de tensão segunda essa metodologia de análise estrutural.



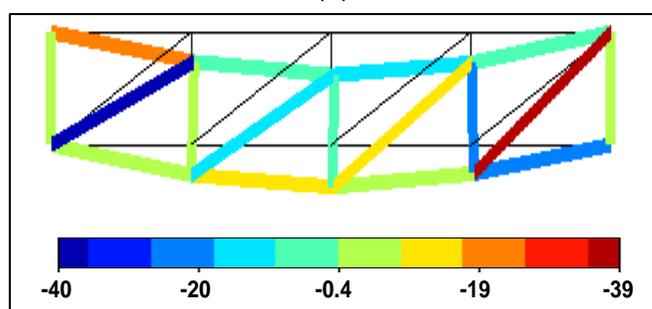
(a)



(b)



(c)



(d)

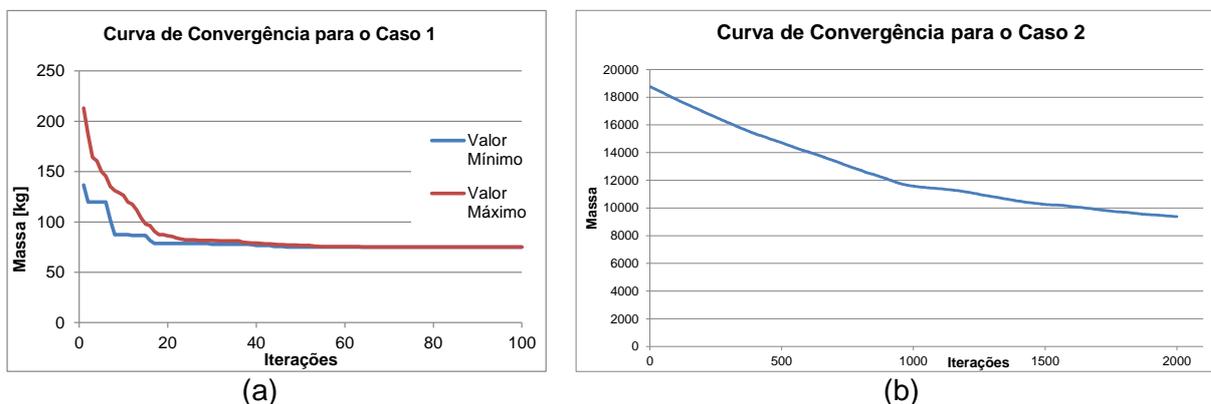
Figura A.1 – Estrutura analisada, onde (a) apresenta configuração modelada no programa ANSYS®, (b) os contornos dos resultados do deslocamento nodal, (c) estrutura simulada pelo presente método de elementos finitos e (d) contornos dos resultados de tensão.

APÊNDICE B – Tabela das variáveis de projeto discretas utilizadas no desenvolvimento da presente metodologia.

Index	Perfil	Área [mm <sup>2</sup> ]	Momento de Inércia X [mm <sup>4</sup> ]	Momento de Inércia Y [mm <sup>4</sup> ]	n	h [mm]
1	L - 3/4"	111	3600	3600	2	300
2	L - 1"	219	12500	12500	3	310
3	L - 1.1/4"	277	25000	25000	4	320
4	L - 1.1/2"	342	45800	45800	5	330
5	L - 1.3/4"	400	75000	75000	6	340
6	L - 2"	606	146000	146000	7	350
7	L - 2.1/2"	767	290000	290000	8	360
8	L - 3"	1148	620000	620000	9	370
9	L - 3.1/2"	1350	1020000	1020000	10	380
10	L - 4"	1845	1830000	1830000	11	390
11	L - 5"	3064	4700000	4700000	12	400
12	L - 6"	4586	10070000	10070000	13	410
13	L - 8"	7381	29011000	29011000	14	420
14	I - 3"	1080	1051000	18900000	15	430
15	I - 4"	1450	2520000	317000	16	440
16	I - 5"	1880	5110000	502000	17	450
17	I - 6"	2360	9190000	757000	18	460
18	U - 3"	778	689000	82000	19	470
19	U - 4"	1010	1595000	131000	20	480
20	U - 6"	1550	5460000	288000	21	490
21	U - 8"	2168	13443000	541000	22	500
22	U - 10"	2900	28000000	950000	23	510
23	U - 12"	3930	53700000	1610000	24	520
24	T - 1"	154	9000	4400	25	530
25	T - 1.1/2"	340	45600	22200	26	540
26	T - 2"	605	144700	70300	27	550
27	Redondo - 1"	507	20432	20432	28	560
28	Redondo - 1.1/2"	1140	103436	103436	29	570
29	Redondo - 2"	2027	326907	326907	30	580
30	Quadrado - 1"	645	34686	34686	31	590
31	Quadrado - 1.1/2"	1452	175598	175598	32	600
32	Quadrado - 2"	2581	554975	554975	35	650

A avaliação do critério de flambagem é realizada utilizando o momento de inércia do perfil. Como na biblioteca de valores possíveis, apresentada no Apêndice G, existem perfis assimétricos, a escolha do momento de inércia é realizada a partir do menor valor para cada área.

APÊNDICE C – Curvas de Convergência para cada um dos casos analisados.



Curvas de Convergência para cada caso analisado, onde: (a) é a curva do caso 1 e (b) é a curva do caso 2.

APÊNDICE D – Tabela comparativa entre os casos avaliados por Kuckoski, 2013, e o presente trabalho.

Método	Kuckoski 1	Kuckoski 2	Kuckoski 3	Presente Trabalho
A1	100,00	5,00	5,10	59,13
A2	6,68	0,00	5,10	31,64
A3	57,45	70,36	70,40	29,20
A4	0,05	40,62	0,00	0,00
A5	0,00	57,48	40,70	34,39
A6	5,64	40,62	0,06	0,01
A7	7,07	14,14	14,40	27,31
A8	68,31	0,00	0,00	19,96
A9	0,00	7,07	0,02	19,11
A10	68,31	0,00	68,50	8,72
<b>Massa</b>	13429,02	8786,72	8590,56	9380,44
<b>Conf</b>	-0,09	-0,62	-0,53	99,90
<b>%</b>	56,32	2,28	0,00	9,19

APÊNDICE E – Resultados gráficos comparativos entre os casos avaliados por Kuckoski e o presente trabalho.

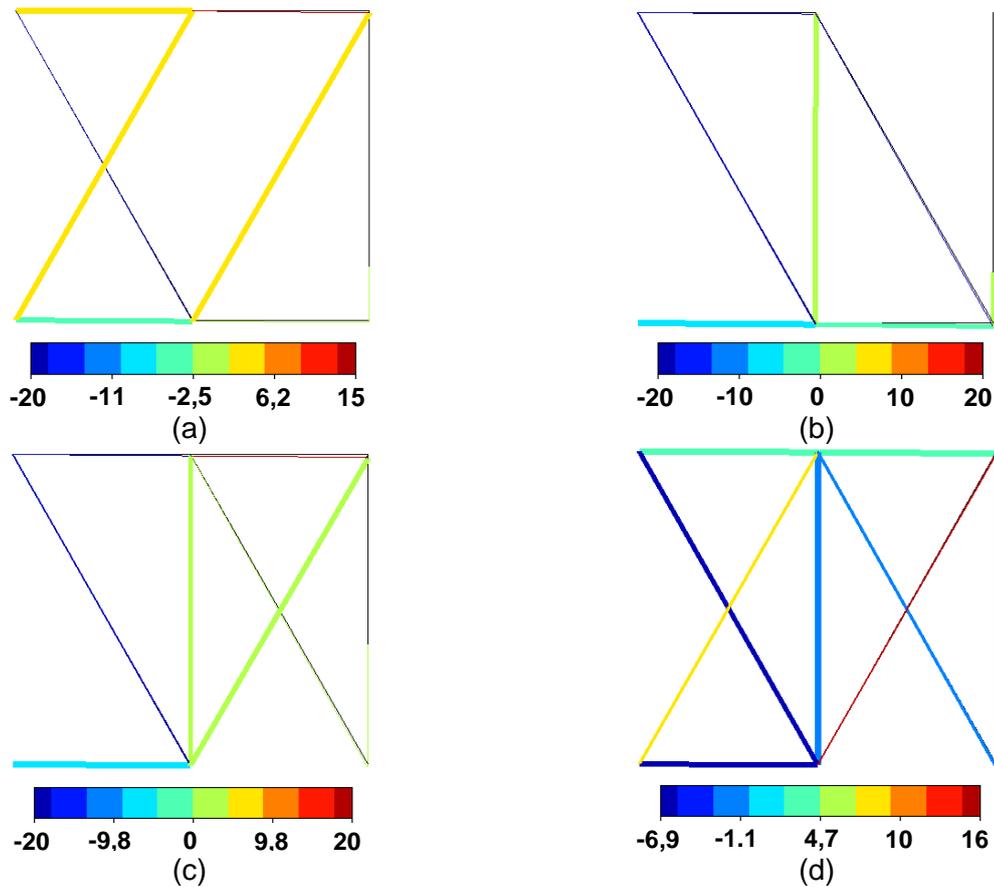


Figura A.1 – Resultados gráficos da treliça de 10 barras otimizada, onde (a) apresenta o método 1 otimizado por Kuckoski, (b) método 2 de Kuckoski, (c) método 3 de Kuckoski e (d) resultados do presente trabalho.