

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRELIÇAS COM RESTRIÇÃO DE FLAMBAGEM  
LINEARIZADA

por

Augusto Kretschmer

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, junho de 2014



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRELIÇAS COM RESTRIÇÃO DE FLAMBAGEM  
LINEARIZADA

por

Augusto Kretschmer

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof.<sup>a</sup> Thamy Cristina Hayashi  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Jun Sérgio Ono Fonseca

Comissão de Avaliação:

Prof. Edson Hikaro Aseka

Prof. Juan Pablo Raggio Quintas

Prof.<sup>a</sup> Leticia Fleck Fadel Miguel

Porto Alegre, 2 de junho de 2014

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos aqueles que estiveram comigo durante essa etapa da minha vida, os amigos de longa data e aqueles que conheci, dentro e fora da universidade, durante esse anos que parecem ter passado em um instante.

Reservo um agradecimento especial ao meu orientador, o Prof. Jun Sérgio Ono Fonseca, pelos ensinamentos durante todo o curso de graduação, pela paciência, prestatividade e amizade, e pela constante participação em todas as etapas deste trabalho.

Agradeço também ao Diego, por fazer questão de me lembrar constantemente da data de entrega do TCC.

Por fim, dedico esse trabalho à minha família, que sempre esteve do meu lado, meu pai, minha irmã, que por vontade própria escolheu me aturar de perto durante esse tempo; e minha mãe, a quem sempre serei grato por tudo o que fez e faz por mim.

KRETSCHMER, A. **Otimização Topológica de Treliças com Restrição de Flambagem Linearizada**. 2014. 25 p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia para realizar a otimização topológica de treliças. O objetivo dessa otimização é reduzir o volume da estrutura, tendo como variável de projeto a área da seção transversal dos elementos, e como restrições, a carga crítica de flambagem global da treliça e a carga crítica de flambagem local das barras. Para a restrição de flambagem global, considerou-se apenas a carga crítica correspondente ao primeiro modo de flambagem. A metodologia consiste em realizar a análise estática da estrutura, resolver o problema de flambagem global, através do cálculo de autovalores e autovetores, obter a sensibilidade da função objetivo e das restrições, por métodos analíticos, e, por fim, otimizar a estrutura empregando um método iterativo. Para aplicar a metodologia proposta, é feito um programa que realiza a otimização da estrutura utilizando programação linear sequencial (SLP). O programa é testado para dois casos distintos, e os resultados demonstram que a metodologia aplicada permite a obtenção de estruturas com volumes consideravelmente reduzidos e que satisfazem às restrições.

**PALAVRAS-CHAVE:** otimização topológica, flambagem global, flambagem local, treliças, programação linear sequencial (SLP).

KRETSCHMER, A. **Topology Optimization of Trusses with Linear Buckling Constraints**. 2014. 25 p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

## ABSTRACT

This work presents a methodology for topology optimization of trusses. The optimization's objective is to reduce the structure's volume, with the cross sectional area of the bars as problem variables, and the critical loads of global buckling and local buckling as constraints. For the global buckling constraint, only the first buckling mode load is considered. The methodology consists in doing the static analysis, solving the global buckling problem, by the calculation of eigenvalues and eigenvectors; obtaining the objective function and constraints sensitivities, by analytic methods, and finally, optimizing the structure, using an iterative method. A code is made to apply the proposed methodology, and it solves the structure optimization using sequential linear programming (SLP). The code is tested for two cases, and the results show that the applied methodology leads to a highly reduced volume structure which satisfies the constraints.

**KEYWORDS:** topology optimization, global buckling, local buckling, truss, sequential linear programming (SLP).

## ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. OBJETIVOS .....	1
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	2
4. METODOLOGIA .....	2
4.1. Análise estática .....	2
4.2. Flambagem global .....	3
4.3. Análise de sensibilidade .....	4
4.3.1. Derivada da função objetivo .....	4
4.3.2. Gradiente para a flambagem global .....	4
4.3.3. Gradiente para a flambagem local.....	5
4.4. Otimização topológica .....	7
4.4.1. Função objetivo .....	7
4.4.2. Variável de projeto .....	7
4.4.3. Restrições.....	7
5. RESULTADOS.....	9
5.1. Caso inicialmente superdimensionado .....	10
5.2. Caso inicialmente subdimensionado .....	12
6. CONCLUSÕES.....	13
6.1. Sugestões para trabalhos futuros .....	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	15
ANEXO I - Matriz de rigidez do elemento de barra e matriz de rigidez global da treliça .....	16
ANEXO II - Matriz de rigidez geométrica da barra e matriz de rigidez geométrica da treliça .....	17
ANEXO III - Derivada do autovalor .....	18
ANEXO IV - Derivada das forças internas da barra .....	19
APÊNDICE I - Resultados adicionais .....	20

## 1. INTRODUÇÃO

Os projetos de engenharia buscam as soluções mais apropriadas para os diversos problemas propostos. O projeto deve buscar a solução que possua a melhor relação custo-benefício, de acordo com os atributos desejáveis.

A otimização é uma área que atua na minimização ou maximização de um ou mais parâmetros, chamados de **funções objetivo** do problema. Para tanto, alguns parâmetros de projeto devem ser pré-estabelecidos. Com uma configuração geral já definida, definem-se as **variáveis de projeto**, das quais a função objetivo é obrigatoriamente dependente. Existem, ainda, as **restrições** do problema, que delimitam os intervalos em que as variáveis de projeto podem se situar.

De acordo com Silva, 2009, uma das áreas da engenharia em que a otimização tem sido intensivamente estudada desde o século XIX é a área de otimização estrutural. Em geral, esses problemas de otimização envolvem a redução do volume da estrutura, que pode ser entendido como redução de custo. Porém, é importante ressaltar que a diminuição da quantidade de material empregado nem sempre implica custos menores, pois o cálculo deste também está atrelado a custos do processo de fabricação dos elementos, perfis, juntas, materiais empregados, etc. Portanto, mesmo que o custo cresça conforme aumenta o volume de material utilizado, os demais fatores já citados podem fazer com que a otimização estrutural tenha um impacto negativo no custo final de um projeto. Entretanto, diversos projetos de estruturas visam à busca pelo menor peso possível, e na maioria dos casos a redução do custo final é significativa.

As restrições em problemas de otimização estrutural variam muito de acordo com o caso. Um pórtico, por exemplo, poderia ser avaliado pela tensão atuante em cada uma de suas vigas, ou então com a flexibilidade da estrutura. Se os esforços fossem compressíveis, a flambagem poderia ser mais importante. Isso ressalta a relevância da determinação dos esforços no pré-projeto, a fim de que o engenheiro escolha o método de otimização e as restrições mais aplicáveis ao problema.

Neste trabalho é feita a otimização de treliças, buscando-se o volume mínimo da estrutura, tendo como restrição a flambagem global. Primeiramente, a estrutura é resolvida para o caso estático, através da solução das equações de equilíbrio. Em seguida, calculam-se as cargas e os modos de flambagem, solucionando o problema de autovalores e autovetores generalizado. Por fim, é feita a otimização das áreas, utilizando a programação linear sequencial.

## 2. OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo abordar uma metodologia para realizar a otimização topológica de estruturas do tipo treliça, reduzindo seu volume final, e tendo como restrições as cargas críticas de flambagem local e global.

A otimização é realizada pelo método da programação linear sequencial. Para isso, é elaborado um programa que faça a análise estática, o cálculo de flambagem e por fim otimize a estrutura.

A metodologia é testada para dois casos distintos. No primeiro deles, a estrutura suporta uma carga menor do que a carga crítica correspondente ao primeiro modo de flambagem, e o volume final é reduzido a cada iteração durante o processo de otimização. Já no segundo caso, parte-se de uma estrutura cuja resistência à flambagem esteja abaixo dos esforços aplicados, e o volume aumente a cada iteração, até a treliça atingir a resistência à carga crítica correspondente ao primeiro modo de flambagem.

Ainda dentro desses casos, deseja-se confirmar a restrição à flambagem local, isto é, obter ao menos um elemento no qual a redução área da seção transversal seja limitada pela flambagem local.

### 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Haftka, 1985, aplicou o cálculo do gradiente por diferenças finitas, com modificações para melhorar os resultados, em conjunto com a programação linear sequencial. São apresentados resultados para estruturas do tipo treliça. Adelman e Haftka, 1986, analisaram a sensibilidade para estruturas discretas. As derivadas são usadas para determinar a direção em que a solução ótima se encontra, e sua utilização reduz o custo computacional. A publicação abordou a sensibilidade a deslocamento e tensão, sensibilidade de autovalores e autovetores, respostas transientes e projeto de estruturas otimizadas com relação aos parâmetros de projeto. O gradiente foi calculado por diferenças finitas e método analítico. A derivada dos autovalores e autovetores foi feita para autovalores simples e duplos (autovalores que possuem mais de um autovetor associado).

Tseng e Lu, 1990, realizaram a otimização estrutural utilizando múltiplas funções objetivo, para diversas variáveis de projeto. As restrições consideradas foram de tensão, deslocamento, frequência natural e flambagem. Essas restrições, em alguns casos, foram utilizadas como funções objetivo, o que gerou problemas complexos.

Outra publicação relacionada a derivadas de autovalores e autovetores foi feita por Wang, Huang e Zhang, 1993, na qual o método foi desenvolvido para estruturas discretizadas, e a frequência natural ou modo de flambagem é maximizado. Godoy, Taroco e Feijoo, 1994, fizeram a análise de sensibilidade para problemas de vibração e de flambagem, calculando a primeira e segunda ordem das derivadas. Considerou-se apenas a existência de autovalores simples. Lin, Wang e Lim, 1996, desenvolveram o estudo da derivada de autovalores e autovetores, também considerando apenas autovalores simples.

Achtziger, 1999, publicou um artigo dividido em duas partes. Na primeira parte, é desenvolvida uma metodologia que faz a otimização topológica de uma treliça, submetida a restrições de tensão e estabilidade local. Neste trabalho, concluiu-se que a restrição de flambagem é complexa, pois a força no elemento depende das variáveis de projeto. No segundo artigo, resolve-se o mesmo problema, utilizando restrições de tensão, flambagem local e esbeltez.

Guilherme, 2000, desenvolveu uma metodologia que realiza a otimização de treliças e pórticos com restrições de flambagem e flexibilidade. O gradiente para a flambagem é obtido pelo método analítico, para os casos de autovalores simples e duplos, e o gradiente para flexibilidade é obtido a partir do trabalho externo. A otimização é feita utilizando programação linear sequencial. São apresentados resultados para diversas configurações de estruturas.

Martins, 2011, realizou a otimização de treliças planas, na qual minimiza o peso da estrutura, tendo como restrições tensão, flexibilidade, ou tensão e flambagem local juntas.

### 4. METODOLOGIA

#### 4.1. Análise estática

Neste trabalho, são analisadas estruturas do tipo treliça. Essas estruturas são compostas por elementos de barras, nos quais atuam somente esforços normais. Por uma questão de simplicidade, adotou-se uma análise bidimensional, apesar da metodologia ser perfeitamente aplicada a estruturas tridimensionais. Cada elemento da treliça é conectado a dois nós, aos quais estão associados deslocamentos nas direções horizontal e vertical, e sobre os quais podem atuar cargas nodais.

A primeira etapa em um cálculo estrutural é a definição da geometria, que se inicia pela enumeração dos nós, e a definição de suas coordenadas espaciais com relação a um sistema global de referência. Em seguida, é feita a definição dos elementos, que se dá por sua enumeração e suas conectividades, ou seja, definição dos nós pertencentes a cada um dos elementos. A cada elemento está associado um sistema local de coordenadas, com origem situada no primeiro nó fornecido nas conectividades, um eixo axial e outro perpendicular ao elemento.

A análise estática é feita pelo método da rigidez, através do qual é representado matricialmente o comportamento de cada um dos elementos, para dessa forma relacionar as forças atuantes no sistema com os deslocamentos nodais. Tais deslocamentos correspondem à incógnita do problema. A matriz que representa esse comportamento é chamada de matriz de rigidez do elemento. Ao relacionar as rigidezes dos elementos entre si, de acordo com sua orientação espacial e suas conectividades, é obtido o comportamento de toda a estrutura, representado pela matriz de rigidez global do sistema. Essa matriz constitui o conjunto de equações que relacionam força a deslocamento, e permite a solução do problema estático.

Outros parâmetros de entrada do problema seriam as propriedades do material, que será considerado elástico linear isotrópico (portanto, para essa análise, somente o módulo de elasticidade é relevante), a seção transversal das barras (de onde se obtém a área e o momento de inércia), as vinculações impostas nos nós (deslocamentos prescritos) e as forças aplicadas nos nós.

Por ser universalmente conhecida, a dedução da matriz de rigidez do elemento de barra é apresentada no Anexo I.

O problema estrutural é resolvido pelo método dos elementos finitos através da solução do sistema dado por

$$f = K u , \quad (4.1)$$

onde  $f$  é o vetor de forças nodais,  $K$  é a matriz de rigidez global da estrutura e  $u$  é o vetor de deslocamentos nodais.

Com isso, é obtida a solução dos deslocamentos nodais. Os deslocamentos permitem calcular as novas coordenadas do sistema, obtendo assim a configuração da estrutura deformada. Também é possível a determinação do alongamento das barras e suas deformações infinitesimais. Pela Lei de Hooke, pode-se relacionar a deformação com a tensão atuante na barra, através do módulo de elasticidade ( $E$ ), e, por fim, multiplicar a tensão pela área da barra para obter as forças axiais atuantes em cada elemento. Este método de obtenção dos esforços internos, no entanto, gera alguns erros numéricos, pois inicialmente é feita a soma de um valor pequeno (deslocamentos nodais) com um valor muito maior (coordenadas nodais), e assim se perdem alguns dígitos de precisão.

Para calcular as forças axiais nas barras, utiliza-se a equação 4.1, porém ao invés de utilizar os vetores completos de força e deslocamento, e a matriz de rigidez global da estrutura, faz-se, para cada elemento

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} , \quad (4.2)$$

cujos índices correspondem ao nó e direção.

As forças obtidas com a equação 4.2 são somadas vetorialmente, resultando na força axial do elemento. Dividindo esses valores pela área, obtém-se a tensão. Por esse método, os erros mencionados anteriormente são reduzidos.

#### 4.2. Flambagem global

As equações presentes nas seções anteriores são válidas para deformações infinitesimais. Se as deformações deixarem de ser negligenciáveis, o equilíbrio deve ser analisado para a configuração deformável. Além disso, a análise de deformações finitas deve ser usada para analisar flambagem de estruturas (Gavin, 2012). As deformações fazem aparecer na estrutura um segundo tipo de rigidez, chamada de rigidez geométrica. A dedução da matriz de rigidez geométrica consta no Anexo II.

O cálculo da flambagem é um problema de autovalores e autovetores, dado por

$$(K - \lambda G)w = 0, \quad (4.3)$$

para o qual  $K$  é a matriz de rigidez,  $G$  é a matriz de rigidez geométrica da estrutura,  $\lambda$  é o autovalor, que representa a carga crítica de flambagem, e  $w$  é o autovetor, correspondente ao modo de flambagem.

Cada um dos autovalores obtidos está associado a um dos autovetores, e corresponde à carga crítica de um determinado modo de flambagem. De forma simples,

$$(K - \lambda_i G)w_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4)$$

onde o índice  $i$  indica o modo de flambagem, e  $n$  é o número total de modos de flambagem.

#### 4.3. Análise de sensibilidade

O cálculo da sensibilidade consiste na solução das derivadas das restrições em relação à variável de projeto. A partir do valor desse gradiente, é determinada a direção a ser seguida pela variável de projeto, durante o processo de otimização.

No presente trabalho, as restrições consideradas são as cargas críticas de flambagem global e local, e, portanto, são calculadas as derivadas dessas duas restrições. A sensibilidade é obtida pelo método analítico e por diferenças finitas.

##### 4.3.1. Derivada da função objetivo

A função objetivo é o volume. É escrita em função da variável de projeto, área, como

$$V = \sum_{i=1}^{n_e} A_i l_i, \quad (4.5)$$

onde  $n_e$  é o número de elementos,  $A_i$  representa a área, e  $l_i$  o comprimento do elemento.

A sensibilidade pode facilmente ser calculada como

$$\frac{\partial V}{\partial A_i} = l_i. \quad (4.6)$$

##### 4.3.2. Gradiente para a flambagem global

O gradiente para a carga crítica de flambagem global foi calculado apenas para o primeiro modo de flambagem.

###### 4.3.2.1. Método analítico

Os cálculos analíticos de sensibilidade foram baseados nos resultados de Godoy e Feijoo, 1994, e Haftka e Gürdal, 1992.

Considerando-se o problema de autovalores generalizados, para cada elemento da estrutura

$$(K - \lambda G)w = 0, \quad (4.7)$$

onde  $K$  é a matriz de rigidez,  $G$  é a matriz de rigidez geométrica,  $w$  é o autovetor (modo de flambagem) e  $\lambda$  é o autovalor (carga crítica de flambagem). Ambas  $K$  e  $G$  são simétricas.

A realização da derivada exige diversas operações matemáticas, conforme demonstradas por Guilherme, 2000. Essa dedução pode ser vista no Anexo III.

A expressão que calcula a derivada é apresentada a seguir:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} = \frac{w^t \frac{\partial K}{\partial A} w}{w^t G w}, \quad (4.8)$$

da qual é possível normalizar o denominador, conforme descrito por Manickarajah e Steven, em 1998, para que este seja um valor unitário. Logo

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} = w^t \frac{\partial K}{\partial A} w. \quad (4.9)$$

#### 4.3.2.2. Diferenças finitas

O método de obter a derivada de autovalores por diferenças finitas é bastante simples e de fácil implementação. Consiste em incrementar um determinado passo à variável de projeto, recalculando o valor da restrição, e dividir a diferença nesse resultado pelo incremento. Apresenta-se da seguinte forma:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} \simeq \frac{\Delta \lambda}{\Delta A} = \frac{\lambda(A + \Delta A) - \lambda(A)}{\Delta A}. \quad (4.10)$$

A desvantagem desse método é o alto custo computacional, pois a sensibilidade é calculada para variações de área de cada elemento da estrutura. Isso faz com que o algoritmo que calcula os autovalores seja executado um número de vezes igual ao número de elementos. Porém, ainda constitui um método válido para verificar o método analítico.

Outro problema que pode ocorrer é no tamanho de passo ( $\Delta A$ ) selecionado. Por ser um método derivado da série de Taylor, para o qual os termos de maior ordem são negligenciados, passos muito grandes geram erro na aproximação. Se o passo for pequeno, os erros são decorrentes das operações numéricas.

#### 4.3.3. Gradiente para a flambagem local

##### 4.3.3.1. Derivada da carga crítica de flambagem

A restrição para a carga crítica de flambagem em cada elemento é definida por

$$-f_e \leq P_{cr_e}, \quad (4.11)$$

onde  $f_e$  é a força atuante no elemento, com sinal trocado a fim de tornar a força positiva quando o membro está sob compressão, e  $P_{cr_e}$  é a sua carga crítica de flambagem de Euler. Essa carga é dada por

$$P_{cr_e} = \frac{\pi^2 E_e I_e}{L_e^2}, \quad (4.12)$$

na qual  $E_e$  é o módulo de elasticidade do material,  $I_e$  o momento de inércia de área e  $L_e$  é o comprimento do elemento.

A sensibilidade é calculada em relação às áreas de todos os elementos da estrutura, conforme visto em Martins, 2011. Fazendo a derivada da carga crítica de um elemento e em função da área de um elemento  $i$ , tem-se

$$\frac{\partial P_{cr_e}}{\partial A_i} = \frac{\pi^2 E_e}{L_e^2} \frac{\partial I_e}{\partial A_i}, \quad (4.13)$$

onde todos os termos exceto o momento de inércia independem do valor da área, portanto foram tirados da derivada. O momento de inércia pode ser escrito como uma função da área

$$I_e = \beta A_e, \quad (4.14)$$

na qual se quer encontrar  $\beta$ . O momento de inércia de uma seção circular tubular é dado por

$$I_e = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}, \quad (4.15)$$

onde  $D$  é o diâmetro externo e  $d$  o diâmetro interno. Neste trabalho, considera-se o diâmetro interno como uma fração do diâmetro externo, dada por

$$d = \alpha D. \quad (4.16)$$

Utilizando a equação 4.16, o momento de inércia pode ser reescrito como

$$I_e = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4). \quad (4.17)$$

A área da seção transversal é calculada por

$$A_e = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}, \quad (4.18)$$

na qual pode-se substituir a relação dada por 4.16, resultando em

$$A_e = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2), \quad (4.19)$$

Substituindo as equações 4.19 e 4.17 na equação 4.14, e fazendo-se as devidas simplificações, tem-se

$$\beta = \frac{D^2 (1 - \alpha^4)}{16 (1 - \alpha^2)}. \quad (4.20)$$

Portanto, reescreve-se o momento de inércia como

$$I_e = \frac{D^2 (1 - \alpha^4)}{16 (1 - \alpha^2)} A_e. \quad (4.21)$$

A equação 4.21 ainda depende do diâmetro externo, mas se quer apenas em função da área. Para isso, isola-se o diâmetro externo da expressão da área, o que após algumas simplificações resulta em

$$I_e = \frac{A_e^2 (1 + \alpha^2)}{4\pi (1 - \alpha^2)}, \quad (4.22)$$

que pode finalmente ser derivada em função da área, resultando em

$$\frac{\partial I_e}{\partial A_i} = \frac{A_e (1 + \alpha^2)}{2\pi (1 - \alpha^2)} \frac{\partial A_e}{\partial A_i}. \quad (4.23)$$

Voltando à equação 4.13, tem-se

$$\frac{\partial P_{cr e}}{\partial A_i} = \frac{\pi E_e A_e (1+\alpha^2)}{2L_e^2 (1-\alpha^2)} \frac{\partial A_e}{\partial A_i}, \quad (4.24)$$

cujo termo  $\partial A_e/\partial A_i$  só existe quando  $e = i$ , e tem valor unitário. Se  $e \neq i$ , a derivada vale 0. Isso significa que a carga crítica de flambagem de um elemento só depende de sua própria área, como já era esperado.

#### 4.3.3.2. Derivada da força interna

A alteração nas áreas dos elementos também tem influência nas tensões de toda a estrutura. Portanto, torna-se necessário o cálculo do gradiente das cargas internas das barras em relação às áreas dos membros. Esse cálculo é extenso, e por esse motivo é apresentado no Anexo IV.

A expressão final para calcular a sensibilidade da força interna é

$$\frac{\partial f_e}{\partial A_i} = \delta_{ei} Q_e \frac{\partial K_e}{\partial A_i} H_e u + Q_e K_e H_e K^{-1} \frac{\partial K}{\partial A_i} u. \quad (4.25)$$

### 4.4. Otimização topológica

Para definir o problema de otimização estrutural, é necessário que se definam as variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições, além do método de otimização.

#### 4.4.1. Função objetivo

A função objetivo, volume, é dada por

$$V = \sum_{i=1}^{n_e} A_i l_i, \quad (4.26)$$

onde  $n_e$  é o número de elementos,  $A_i$  representa a área, e  $l_i$  o comprimento do elemento.

#### 4.4.2. Variável de projeto

A área da seção transversal de cada elemento é adotada como variável de projeto, e, neste trabalho, é adotada como uma constante. Pode ser escrita como um vetor de  $n_e$  termos, onde  $n_e$  é o número de elementos da estrutura. Ou seja

$$A = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n_e} \end{Bmatrix}. \quad (4.27)$$

#### 4.4.3. Restrições

A primeira restrição diz respeito à flambagem global, e impede que o valor da carga crítica para o primeiro modo de flambagem seja atingida pela estrutura otimizada. Essa carga, será referida como  $\lambda_1$ . Os valores de  $\lambda$  representam uma grandeza que, quando multiplicada pela(s) carga(s) aplicada(s) na análise estática, causa a flambagem da estrutura. Portanto, a restrição impõe que

$$\lambda_1 \geq \eta, \quad (4.28)$$

onde  $\eta$  pode ser visto como um coeficiente de segurança com relação à flambagem global, e tem valor maior ou igual a 1.

A segunda restrição se refere à flambagem local, e limita o esforço interno das barras a determinado valor, denominado carga crítica de flambagem local. Essa carga, segundo a fórmula de Euler para a flambagem de colunas articuladas em suas duas extremidades, é dada por

$$P_{crítico} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad (4.29)$$

na qual  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $I$  é o momento de inércia de área da barra, e  $l$  é o seu comprimento. Portanto, sendo  $P$  a força suportada por um elemento, a restrição fica

$$-f < \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (4.30)$$

Existe, ainda, uma terceira restrição, que impede que a variação das áreas em cada iteração seja excessivamente grande, garantindo assim a possibilidade de linearização do problema. Essa restrição é conhecida como limites móveis, e é importante principalmente na convergência do problema. É expressa como

$$A_i^{inf} \leq A_i \leq A_i^{sup}, \quad (4.31)$$

Devido ao fato de a restrição de flambagem global ser uma função não convexa, não se pode garantir que o volume final seja o mínimo global. Esse tipo de afirmação só pode ser feita quando a função objetivo e as restrições são funções convexas. Portanto, a configuração ótima obtida após o processo de otimização consiste em um mínimo local.

Conforme Haftka e Gürdal, 1992, o problema de otimização pode ser formulado resumidamente, do seguinte modo

$$\begin{aligned} \text{mínimo} \quad & \sum_{i=1}^{n_g} A_i l_i \\ \text{sujeito} \quad & \lambda_1 \geq \eta \\ & -f_i < P_{cr_i} \\ & A_i^{inf} \leq A_i \leq A_i^{sup}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Neste trabalho, a otimização é feita pelo método da programação linear sequencial (SLP). As restrições são escritas em função da variável de projeto inicial e final de cada iteração. Para isso, expandem-se as restrições em série de Taylor, e eliminam-se os termos de alta ordem, mantendo apenas o termo constante e o da derivada primeira.

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\partial \lambda}{\partial A} (A - A_0), \quad (4.33)$$

$$P_{cr} = P_{cr_0} + \frac{\partial P_{cr}}{\partial A} (A - A_0), \quad (4.34)$$

$$f = f_0 + \frac{\partial f}{\partial A} (A - A_0), \quad (4.35)$$

onde os termos de índice 0 representam os valores da iteração anterior.

A Figura 4.1 apresenta um fluxograma do algoritmo de otimização, pelo método da programação linear sequencial.

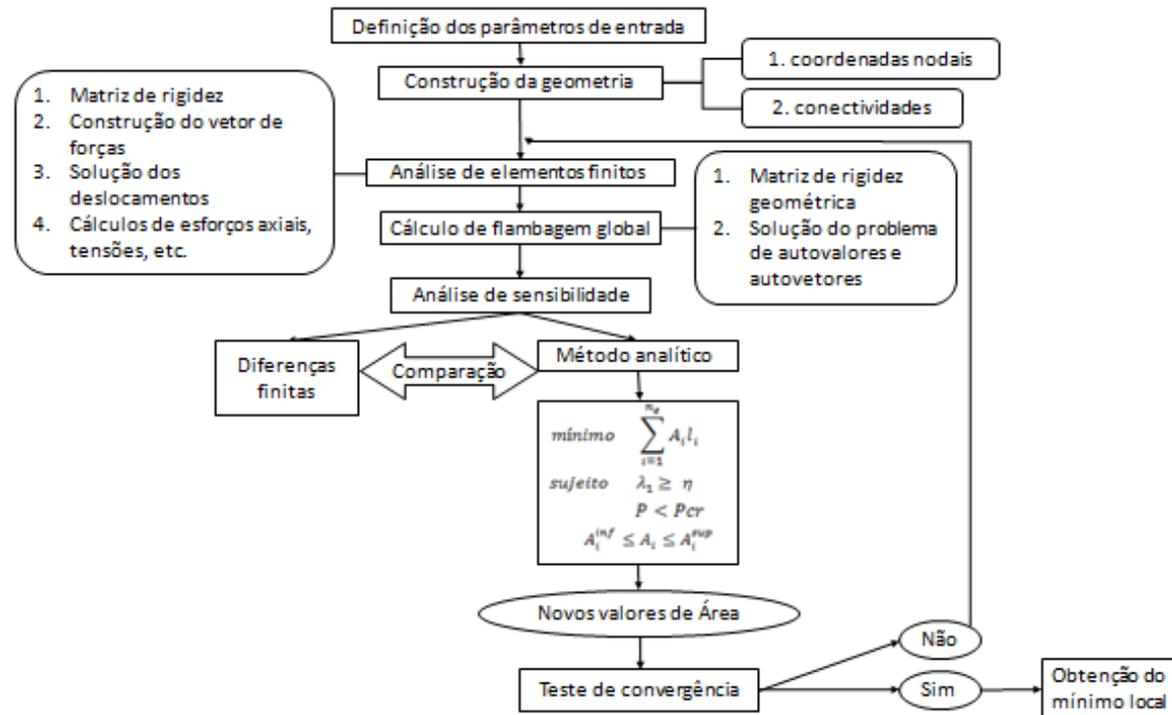


Figura 4.1 - Fluxograma do algoritmo utilizado.

Para aplicar a metodologia apresentada, foi desenvolvido um programa na linguagem do *software* Maple. O programa lê os dados de entrada de um arquivo de texto, gera uma matriz de coordenadas nodais, a matriz de conectividades, e a rigidez da estrutura, resolvendo o problema estático. Obtidos os deslocamentos, é construído um vetor com as forças axiais dos elementos, e então, é feita a matriz de rigidez geométrica da estrutura. Com as duas matrizes de rigidez, é resolvido o problema de flambagem. A partir desse ponto, o programa é dividido em dois: um deles faz o cálculo da sensibilidade por diferenças finitas, e o outro pelo método analítico. A versão que calcula a sensibilidade por diferenças finitas serve só como comparativo para a outra versão, e não será mais mencionada.

Tendo definida a função objetivo, variável de projeto e restrições, é utilizada uma função que resolve o problema de otimização. As áreas dos elementos são sobrescritas com os novos valores, e o programa é executado novamente, a partir da construção da matriz de rigidez (pois os passos anteriores a este permanecem iguais), até atingir a convergência (quando a restrição atinge o valor limite, ou quando a função objetivo varia pouco entre uma iteração e a outra). Há ainda, por segurança, um critério de parada que limita o número de iterações, informado no arquivo de entrada.

Adicionalmente, o programa possui saída gráfica, que pode mostrar a configuração inicial da estrutura, sua condição deformada, as tensões, os modos de flambagem e a treliça com volume otimizado.

## 5. RESULTADOS

Os resultados da análise estática e de flambagem global foram validados com um modelo calculado no programa comercial *ANSYS Multiphysics*. A comparação entre resultados mostrou-se satisfatória, uma vez que as diferenças entre os valores foram desprezíveis.

A fim de testar a metodologia desenvolvida, os parâmetros de entrada foram:

- número de “módulos” da treliça: 10;
- largura da estrutura: 2 m;
- altura dos módulos: 3 m;
- módulo de elasticidade: 210 GPa;

- seção transversal circular tubular, com dimensões que variam para cada caso que será mostrado a seguir;
- restrições impostas nos dois nós inferiores, em ambas as direções, com valor 0 (problema hiperestático);
- duas forças,  $F_1$  e  $F_2$ , ambas de 5 kN, são aplicadas nos nós superiores, na direção vertical para baixo.

A estrutura é mostrada na Figura 5.1.

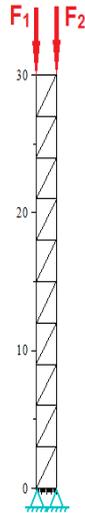


Figura 5.1 – Estrutura calculada nos casos propostos

5.1. Caso inicialmente superdimensionado

Parte-se de uma estrutura que resiste à carga aplicada, logo o coeficiente de segurança com relação à flambagem global é maior que 1. O volume, portanto, pode ser minimizado. Os parâmetros de entrada do problema são os descritos no início deste capítulo e a seção transversal tem diâmetro externo de 50 mm, e diâmetro interno de 45 mm.

Inicialmente, testou-se apenas a restrição à flambagem global. A estrutura otimizada, e o primeiro e segundo modos de flambagem da mesma podem ser vistos na Figura 5.2.

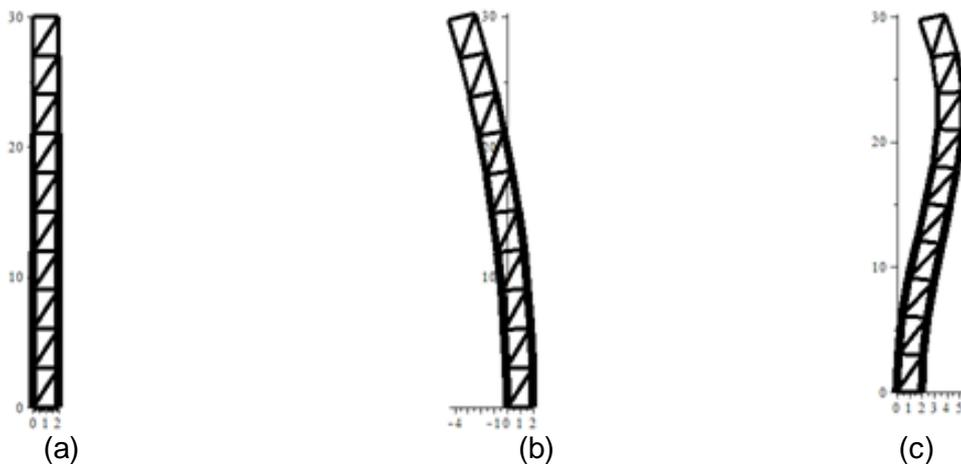


Figura 5.2 - (a) estrutura otimizada; (b) primeiro modo; e (c) segundo modo de flambagem.

A partir da Figura 5.2, percebe-se que as barras laterais têm maior influência sobre a restrição de flambagem global, devido ao fato de suas áreas ficarem maiores. Os elementos da parte inferior também possuem uma área maior, quando comparados com as barras superiores. Os modos estão de acordo com o que se esperaria da flambagem de uma coluna.

Mas é importante ressaltar que a estrutura não atinge o segundo modo, já que ela foi dimensionada de maneira que ficasse abaixo da carga crítica correspondente ao primeiro modo. Os gráficos de convergência do autovalor e do volume podem ser vistos na Figura 5.3.

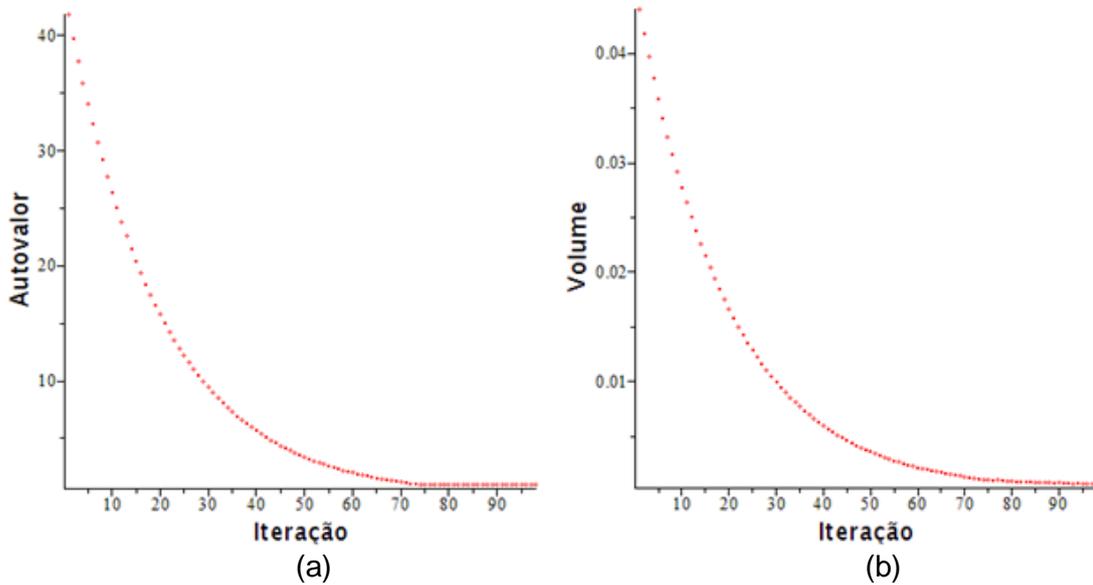


Figura 5.3 - (a) Gráfico de convergência do autovalor; e (b) Gráfico de convergência do volume.

O autovalor inicialmente é alto, o que significa que a estrutura pode ter seu volume reduzido, até chegar a 1 (para esse exemplo, não foi utilizado um coeficiente de segurança). A diminuição do autovalor é gradativa, e converge após 98 iterações. O autovalor inicialmente vale cerca de 43, e decresce até alcançar um valor próximo a 1.

Analisando a Figura 5.3(b), vê-se a redução sofrida pelo volume a cada iteração. A função objetivo converge suavemente, e chega ao seu valor final quando a restrição é atingida. O volume é reduzido de 0,04 m<sup>3</sup> até 0,0006 m<sup>3</sup>. As informações sobre as seções transversais após o processo de otimização podem ser vistas no Apêndice I (tabela 1).

Em seguida, utilizou-se o programa para testar a restrição à flambagem local e a restrição à flambagem global em conjunto. O programa apresentou problemas em sua convergência, mas funcionou perfeitamente para uma estrutura mais simples do que a mostrada na Figura 5.1. A metodologia foi testada em uma estrutura com 2 módulos, ao invés de 10. Os outros parâmetros não foram alterados.

A estrutura otimizada, e o primeiro e segundo modos de flambagem da mesma podem ser vistos na Figura 5.4.

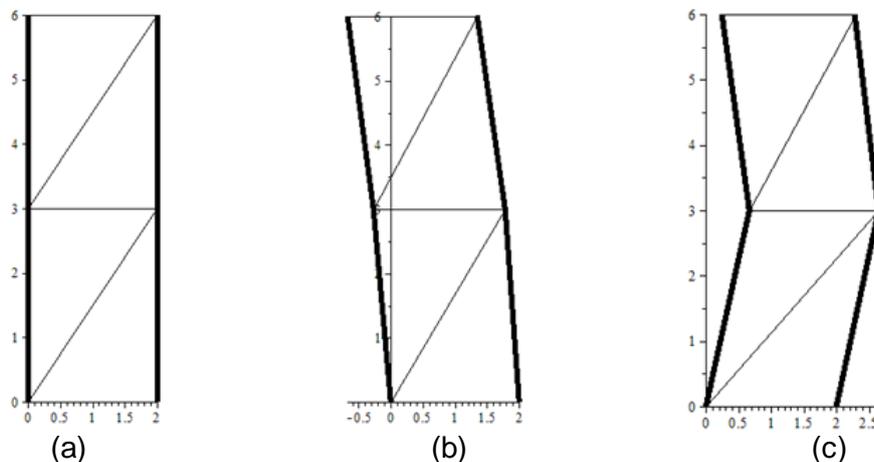


Figura 5.4 - (a) estrutura otimizada; (b) primeiro modo; e (c) segundo modo de flambagem.

As barras laterais, onde os esforços são maiores, ficam restringidas pela flambagem local, e devido a isso possuem áreas iguais (já que os esforços nas mesmas também o são). Os gráficos de convergência do autovalor e volume podem ser vistos na Figura 5.5.

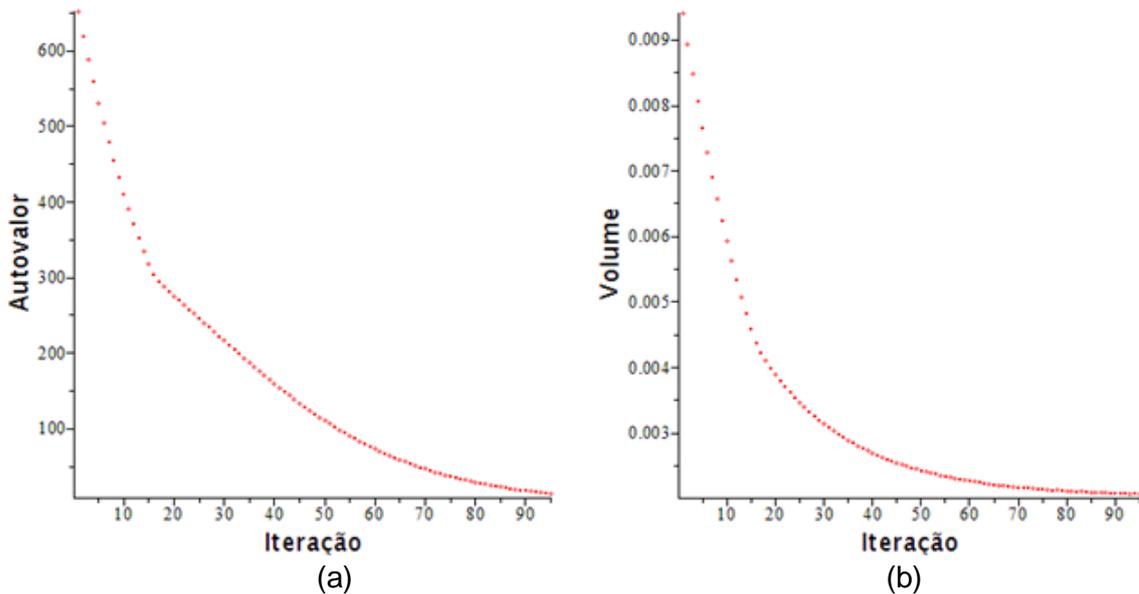


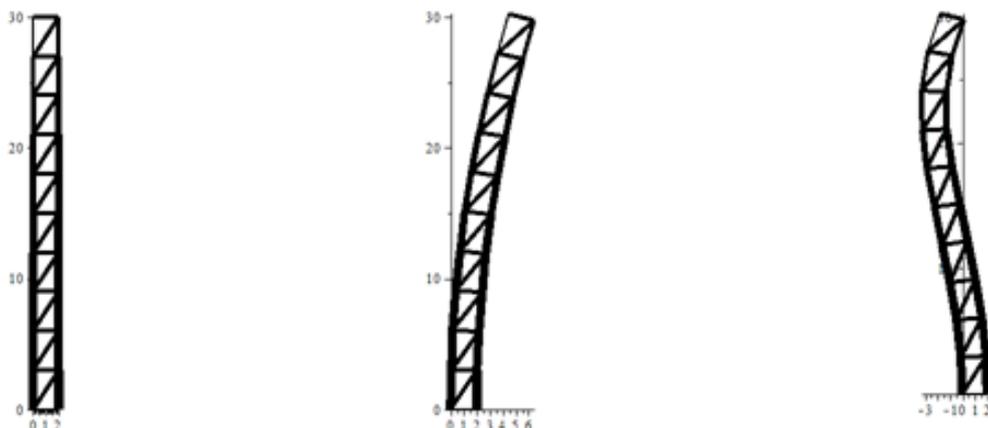
Figura 5.5 - (a) Gráfico de convergência do autovalor; e (b) Gráfico de convergência do volume.

Pelas figuras acima, percebe-se que os gráficos têm o comportamento semelhante ao caso em que só é considerada a restrição global. O autovalor tem o valor final de 14. Já o volume decresce até  $0,002 \text{ m}^3$  (mesmo em uma estrutura menor, ao utilizar a restrição de flambagem local, o volume final da estrutura fica maior que no caso anterior). As informações sobre as seções transversais resultantes podem ser vistas no Apêndice I (tabela 2).

## 5.2. Caso inicialmente subdimensionado

Desta vez, parte-se de uma estrutura submetida a uma carga superior à carga crítica do primeiro modo de flambagem. Nesse caso, as áreas da seção transversal terão de aumentar, a fim de aumentar a resistência da treliça. Com isso, a função objetivo aumentará, até o momento em que a restrição à flambagem passa a ser respeitada. Para partir de uma estrutura subdimensionada, o diâmetro externo inicial é definido como 5,0 mm, e o interno, de 4,5 mm (dez vezes menores que no caso anterior). Só foi testada a restrição de flambagem global.

A estrutura após o processo de otimização pode ser vista na Figura 5.6, juntamente com o primeiro e segundo modos de flambagem.



(a) (b) (c)  
 Figura 5.6 - (a) estrutura otimizada; (b) primeiro modo; e (c) segundo modo de flambagem. Isso comprova que o algoritmo funciona bem, já que todas as condições de contorno são as mesmas, exceto pela área, que é a variável do problema. Os modos novamente se comportam como o primeiro e segundo modos de flambagem de uma coluna.

Os gráficos de convergência do autovalor e do volume podem ser vistos na Figura 5.7.

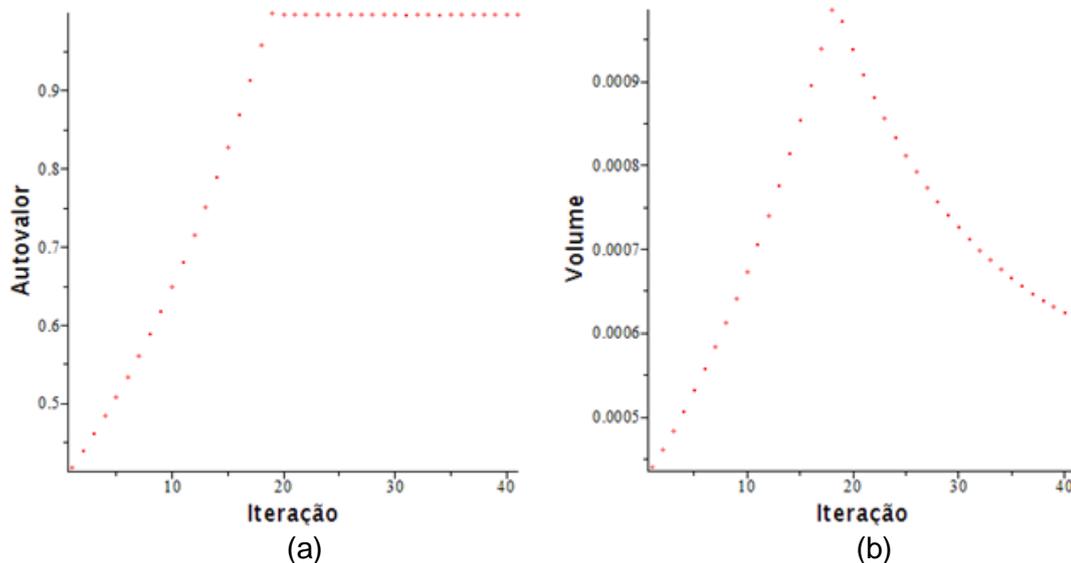


Figura 5.7 - a) Gráfico de convergência do autovalor; e (b) Gráfico de convergência do volume.

O autovalor inicialmente vale 0,43, e aumenta a cada iteração, até chegar ao valor 1. O número de iterações necessárias nesse processo é de 19 iterações. A partir desse ponto, o autovalor permanece oscilando minimamente em torno de 1.

O volume aumenta a cada iteração, até a restrição à flambagem ser atingida, e a estrutura passar a resistir à carga crítica. Então, começa o processo de otimização das áreas, até o volume ser minimizado. Ele começa em 0,0004 m<sup>3</sup>, e chega ao pico de 0,001 m<sup>3</sup>, então é reduzido até o valor de 0,0006 m<sup>3</sup>, mesmo do caso anterior. As informações sobre as seções transversais após o processo de otimização podem ser vistas no Apêndice I.

O caso subdimensionado não foi calculado com a restrição de flambagem local. Isso porque, ao escolher valores iniciais de área que tornem a estrutura subdimensionada com relação à flambagem global, algumas barras ficam subdimensionadas com relação à flambagem local. Assim, seria necessário fazer um algoritmo que primeiramente aumentasse a área dessas barras, o que não foi realizado nesse trabalho, para em seguida começar a otimizar a estrutura.

## 6. CONCLUSÕES

A otimização estrutural pode ser aplicada a treliças submetidas a restrições de flambagem, tendo como objetivo a redução do volume. Para isso foi desenvolvido um algoritmo que faz a análise estática, o cálculo de flambagem, o gradiente das restrições e função objetivo com relação à variável de projeto e, num processo iterativo, otimiza a estrutura.

A análise estática e a solução do problema de flambagem geraram resultados semelhantes aos obtidos em um programa comercial. Já a obtenção das sensibilidades pôde ser conferida através do método das diferenças finitas.

A metodologia aplicada neste trabalho teve resultados coerentes para os dois casos analisados. A topologia final da estrutura mostrou-se dentro do esperado, e as restrições de flambagem global foram obedecidas.

A restrição de flambagem local apresentou problemas. Apesar disso, ao funcionar para um caso de estrutura mais simples, o resultado mostrou que a metodologia está correta, e a origem dos erros na convergência para a estrutura mais complexa deve ter origem numérica.

Por fim, a utilização do método de programação linear sequencial, utilizando limites móveis, mostrou-se uma boa ferramenta de otimização. O algoritmo apresenta-se eficiente na resolução dos problemas, o que também é influenciado pela escolha dos métodos analíticos para calcular a sensibilidade.

### 6.1. Sugestões para trabalhos futuros

A metodologia utilizada neste trabalho pode ser aplicada a estruturas tridimensionais. Sugere-se que seja implementado um programa que realize isso, de modo a obter resultados mais realísticos.

A seção transversal poderia ser limitada por dimensões de seções existentes no mercado, o que também dependeria de normas e do material empregado. Isso levaria a um problema de otimização discreta.

Já a parte de metodologia deveria ser aprimorada, de modo a obter o gradiente do autovetor, utilizado na restrição de flambagem global, para o caso em que surgem autovalores múltiplos. A ocorrência de autovalores múltiplos gera instabilidade no problema. Guilherme, 2000, calculou a sensibilidade para autovalores duplos, mas conforme o próprio autor sugeriu nesse mesmo trabalho, este cálculo deveria ser estendido a  $n$  autovalores repetidos.

A restrição à flambagem local também poderia ser melhorada, visto que surgiram erros em seu cálculo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Achtziger, W.; **“Local Stability of Trusses in the Context of Topology Optimization Part I: Exact Modeling”**, Structural Optimization, vol. 17, pp. 235-246, 1999.
- Achtziger, W.; **“Local Stability of Trusses in the Context of Topology Optimization Part II: A Numerical Approach”**, Structural Optimization, vol. 17, pp. 247-258, 1999.
- Adelman, H. M., Haftka, R. T.; **“Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems”**, AIAA Journal, vol. 24, pp. 823-832, 1986.
- Gavin, H. P.; **“Geometric Stiffness Effects in 2D Trusses”**, Duke University, 2012.
- Godoy, L. A., Taroco, E. O., Feijoo, R. A.; **“Second-Order Sensitivity Analysis in Vibration and Buckling Problems”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, pp. 3999-4014, 1994.
- Guilherme, C. E. M.; **“Otimização Topológica de Treliças e Pórticos com Restrições de Flambagem e Flexibilidade”**, Dissertação de Mestrado, Universidade do Rio Grande do Sul, 2000.
- Haftka, R. T.; **“Sensitivity Calculations for Iteratively Solved Problems”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 21, pp. 1535-1546, 1985.
- Haftka, R. T., Gürdal, Z.; **“Elements of Structural Optimization”**. Kluwer Publishers, 3<sup>rd</sup> Edition, 1992.
- Lin, R. M., Wang, Z., Lim M. K.; **“A Pratical Algorithm for the Efficient Computation of Eigenvector Sensitivities”**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 130, pp. 355-367, 1996.
- Manickarajah, D., Xie, Y. M., Steven, G. P.; **“An Evolutionary Method for Optimization of Plate Buckling Resistance”**, Finite Elements in Analysis and Design, vol. 29, pp. 205-230, 1998.
- Martins, T. F. A.; **“Otimização de Estruturas de Treliças Utilizando Técnicas de Programação Linear”**, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Pernambuco, 2011.
- Silva, E. C. N.; **“Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos”**. Escola Politécnica da USP, 2009.
- Tseng, C. H. e Lu, T. W.; **“Minimax Multiobjective Optimization in Structures Design”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 30, pp. 1213-1228, 1990.
- Wang, J. Z., Huang, Z. C., Zhang, Q. J.; **“Sensitivities of Mechanical Structures to Structural Parameters”**, Computer & Structures, vol. 49, pp. 557-560, 1993.

ANEXO I - Matriz de rigidez do elemento de barra e matriz de rigidez global da treliça

Considerando a barra da Figura 1, orientada em um sistema de coordenadas  $x'$  e  $y'$ . Os deslocamentos nodais são representados pela variável  $u$ , cujo primeiro índice corresponde ao nó e o segundo índice à direção do deslocamento no sistema de coordenadas locais (onde 1 representa o eixo  $x'$  e 2 representa o eixo  $y'$ ).

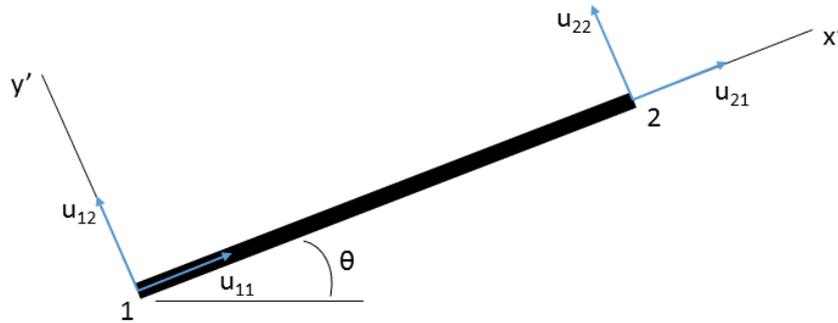


Figura 1 - Elemento de barra.

A barra da Figura possui área da seção transversal  $A$  constante, módulo de elasticidade  $E$  e comprimento  $L$ . Para a barra mostrada na Figura, a matriz de rigidez é

$$K_l = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

A fim de obter as matrizes de rigidez no sistema global, utiliza-se uma matriz de rotação, que pode ser escrita como

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

para a qual  $\theta$  é o ângulo de inclinação da barra com relação ao eixo horizontal do sistema de coordenadas global.

Então faz-se

$$K_g = Q^t K_l Q, \quad (3)$$

onde  $K_g$  é a matriz de rigidez do elemento, no sistema global de coordenadas. As matrizes de cada elemento são então superpostas em uma única matriz de rigidez global ( $K$ ), de modo que todas as forças nodais se relacionem com todos os deslocamentos, obtendo assim um único sistema de equações.

ANEXO II - Matriz de rigidez geométrica da barra e matriz de rigidez geométrica da treliça

Consideram-se novamente os deslocamentos  $u_{11}$ ,  $u_{12}$ ,  $u_{21}$  e  $u_{22}$  (ver Figura 1 no Anexo I), e as forças nas extremidades  $q_{11}$ ,  $q_{12}$ ,  $q_{21}$  e  $q_{22}$ . Define-se  $\alpha$  como o ângulo no sentido anti-horário de inclinação da barra deformada em relação ao seu sistema local de coordenadas, na condição sem deformação. As equações de equilíbrio, nas extremidades do elemento, são

$$\begin{aligned} q_{11} &= -P \cos \alpha \\ q_{12} &= -P \sin \alpha \\ q_{21} &= P \cos \alpha, \\ q_{22} &= P \sin \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $P$  é a força axial no elemento. O ângulo  $\alpha$  é determinado por meio da geometria deformada, isto é, os deslocamentos.

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{L_d}(u_{22} - u_{12}) \\ \cos \alpha &= \frac{1}{L_d}(L + u_{21} - u_{11}) \approx 1, \end{aligned} \quad (2)$$

na qual  $L$  representa o comprimento da barra não deformada e  $L_d$  o seu comprimento após a deformação. Substituindo as equações 2 nas equações de equilíbrio (1) e reescrevendo-as em forma matricial, tem-se

$$\begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{21} \\ q_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{P}{L_d} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

O vetor  $\{-P \ 0 \ P \ 0\}^T$  pode ser escrito em função da matriz de rigidez, logo,

$$\begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{21} \\ q_{22} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{Bmatrix} + \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

onde a primeira matriz multiplicando o vetor de deslocamentos é a matriz de rigidez. A segunda matriz que multiplica o vetor de deslocamentos é definida como a matriz de rigidez geométrica da estrutura. É feita uma aproximação de que  $L_d \approx L$ . Portanto,

$$G_l = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Deseja-se rotacionar essa matriz para o sistema de coordenadas global, então faz-se

$$G_g = Q^t G_l Q, \quad (6)$$

onde  $G_g$  é a matriz de rigidez geométrica do elemento, no sistema global de coordenadas. As matrizes geométricas de cada elemento também são superpostas, gerando uma única matriz de rigidez geométrica global ( $G$ ).

## ANEXO III - Derivada do autovalor

Parte-se do problema de autovalores generalizado

$$(K_e - \lambda G_e)w_e = 0, \quad (1)$$

onde  $K_e$  é a matriz de rigidez,  $G_e$  é a matriz de rigidez geométrica,  $w_e$  é o autovetor, e  $\lambda$  é o autovalor. O índice  $e$  significa que são todos definidos para o elemento. Para simplificar as expressões, ele será suprimido.

Multiplicando por  $w^T$ , a equação acima fica

$$w^T(K - \lambda G)w = 0. \quad (2)$$

Então se deriva a equação (2) em função da área, e aplica-se a regra da cadeia

$$\frac{\partial w^T}{\partial A}(K - \lambda G)w + w^T(K - \lambda G)\frac{\partial w}{\partial A} + w^T\left(\frac{\partial K}{\partial A} - \frac{\partial \lambda}{\partial A}G - \lambda\frac{\partial G}{\partial A}\right)w = 0. \quad (3)$$

Sabendo que os termos

$$\frac{\partial w^T}{\partial A}(K - \lambda G)w = 0, \quad (4)$$

e

$$w^T(K - \lambda G)\frac{\partial w}{\partial A} = 0, \quad (5)$$

a equação 3 fica

$$w^T\left(\frac{\partial K}{\partial A} - \frac{\partial \lambda}{\partial A}G - \lambda\frac{\partial G}{\partial A}\right)w = 0. \quad (6)$$

Isolando a derivada do autovalor, tem-se

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} = \frac{w^T\left(\frac{\partial K}{\partial A} - \lambda\frac{\partial G}{\partial A}\right)w}{w^T G w}. \quad (7)$$

Conforme descrito por Manickarajah e Steven, 1998, pode-se normalizar o denominador, de modo que

$$w^T G w = 1, \quad (8)$$

e o segundo termo do numerador

$$\lambda\frac{\partial G}{\partial A} \approx 0, \quad (9)$$

pois seu valor, comparado ao primeiro termo, é muito baixo. Enfim, chega-se à expressão para o cálculo da derivada de autovalores simples

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} = w^T \frac{\partial K}{\partial A} w. \quad (10)$$

## ANEXO IV - Derivada das forças internas da barra

A força interna da barra (em coordenadas locais) é obtida através da rotação das forças nas coordenadas globais para locais

$$f_e^{local} = Q_e f_e, \quad (1)$$

onde  $Q_e$  é a matriz de rotação de coordenadas globais para locais, e é dada por

$$Q_e = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de inclinação da barra com relação ao sistema global de coordenadas.

Escrevendo em termos da matriz de rigidez do elemento ( $K_e$ ), tem-se

$$f_e^{local} = Q_e K_e u_e, \quad (3)$$

na qual  $u_e$  é o vetor de deslocamentos do elemento (em coordenadas locais).

O vetor  $u_e$  pode ser obtido através da multiplicação de uma matriz de localização  $H_i$  pelo vetor de deslocamentos global  $u$ . As dimensões de  $H_i$  são 4 linhas (referentes aos quatro graus de liberdade do elemento, no caso bidimensional) e número de colunas igual ao número de graus de liberdade da estrutura. Os elementos de  $H_i$  valem 1 nas posições que multiplicam os deslocamentos da barra, e os demais valem 0. Utilizando  $H_i$  na equação 3, obtém-se

$$f_e^{local} = Q_e K_e H_e u, \quad (4)$$

onde  $u$  é o vetor global de deslocamentos. Em função da matriz de rigidez, tem-se

$$f_e^{local} = Q_e K_e H_e K^{-1} f, \quad (5)$$

onde  $K$  e  $f$  são a matriz de rigidez global e o vetor global de forças, respectivamente. Agora, é feita a derivada da equação 6 com respeito às áreas. Assim como foi feito para a carga crítica de flambagem de Euler, a derivada é feita em relação à área de todos os elementos. Por isso, usar-se-á o índice  $i$  para essas áreas. A derivada da força interna do elemento fica

$$\frac{\partial f_e}{\partial A_i} = Q_e \frac{\partial K_e}{\partial A_i} H_e K^{-1} f + Q_e K_e H_e \frac{\partial K^{-1}}{\partial A_i} f. \quad (6)$$

Como a derivada  $\partial K_e / \partial A_i$  só é diferente de zero para  $e = i$ , adiciona-se um delta de Kronecker na primeira parcela. O termo  $K^{-1} f$  pode ser substituído por  $u$ . Já na segunda parcela, o termo  $\partial K^{-1} / \partial A_i$  é bastante conhecido, e pode ser escrito como

$$\frac{\partial K^{-1}}{\partial A_i} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial A_i} K^{-1}. \quad (7)$$

Substituindo a equação 8 na equação 7 além das outras modificações citadas anteriormente, obtém-se

$$\frac{\partial f_e}{\partial A_i} = \delta_{ei} Q_e \frac{\partial K_e}{\partial A_i} H_e u + Q_e K_e H_e K^{-1} \frac{\partial K}{\partial A_i} K^{-1} f. \quad (8)$$

Finalmente, chega-se na expressão final para calcular a sensibilidade da força interna.

$$\frac{\partial f_e}{\partial A_i} = \delta_{ei} Q_e \frac{\partial K_e}{\partial A_i} H_e u + Q_e K_e H_e K^{-1} \frac{\partial K}{\partial A_i} u. \quad (9)$$

## APÊNDICE I - Resultados adicionais

Na tabela 1, apresentam-se os diâmetros externos após o processo de otimização utilizando apenas a restrição de flambagem global. O Caso 1 representa o caso inicialmente superdimensionado, e o Caso 2 representa o caso inicialmente subdimensionado.

Tabela 1 - Diâmetros finais, utilizando apenas restrição à flambagem global.

Barra	Diâmetro externo [m]		Barra	Diâmetro externo [m]	
	Caso 1	Caso 2		Caso 1	Caso 2
1	0,00405	0,00270	22	0,00704	0,00692
2	0,00864	0,00863	23	0,00405	0,00409
3	0,00405	0,00409	24	0,00748	0,00751
4	0,00895	0,00905	25	0,00405	0,00409
5	0,00405	0,00409	26	0,00635	0,00642
6	0,00883	0,00868	27	0,00405	0,00409
7	0,00405	0,00409	28	0,00702	0,00709
8	0,00898	0,00872	29	0,00405	0,00409
9	0,00405	0,00409	30	0,00520	0,00525
10	0,00821	0,00853	31	0,00405	0,00409
11	0,00405	0,00409	32	0,00616	0,00636
12	0,00882	0,00853	33	0,00405	0,00409
13	0,00405	0,00409	34	0,00405	0,00409
14	0,00827	0,00824	35	0,00405	0,00409
15	0,00405	0,00409	36	0,00520	0,00525
16	0,00835	0,00857	37	0,00405	0,00409
17	0,00405	0,00409	38	0,00405	0,00270
18	0,00776	0,00761	39	0,00426	0,00409
19	0,00405	0,00409	40	0,00405	0,00409
20	0,00816	0,00814	41	0,00405	0,00409
21	0,00405	0,00409			

Na tabela 2, apresentam-se os diâmetros externos após o processo de otimização utilizando as restrições à flambagem global e local

Tabela 2 - Diâmetros finais, utilizando as restrições à flambagem global e local.

Barra	D <sub>externo</sub> [m]
1	0,004374
2	0,033676
3	0,004374
4	0,033676
5	0,004374
6	0,033676
7	0,004374
8	0,033676
9	0,004374